GÉOMÉTRIE

3

Vecteurs : Coordonnées et colinéarité

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Connaître les propriétés du parallélogramme
- Lire les coordonnées d'un point
- Additionner et soustraire des nombres relatifs
- Reconnaître une situation de proportionnalité

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Coordonnées

Partie 1 : coordonnées d'un vecteur

1) Construire un repère $(O; I, J)$. On notera $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$.

2) Placer dans ce repère les points M, P, R tels que :

a) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{\imath}$ **b)** $\overrightarrow{OP} = 3\vec{\jmath}$ **c)** $\overrightarrow{OR} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

3) Quelles semblent être les relations entre les égalités vectorielles et les coordonnées des points ?

4) Placer dans le repère le point N de coordonnées $(-5; 1)$.

5) Donner une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{ON}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

6) On considère un point quelconque E de coordonnées $(x_E; y_E)$.
Donner une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{OE}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

> Les coefficients obtenus dans la décomposition du vecteur $\overrightarrow{OE}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont appelés coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OE}$.

Partie 2 : coordonnées de deux vecteurs

Compléter la figure de la partie **1** .

1) Placer le point S tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NS}$. Lire les coordonnées du point S.

2) Conjecturer une relation liant les coordonnées des points M, N, S.

3) Conjecturer une relation liant les coordonnées de deux vecteurs égaux.

ACTIVITÉ 2 Opérations

Partie 1 : coordonnées d'une somme

1) Dans un repère $(O; I, J)$, placer les points suivants.

- $A(1; 5)$ • $B(-4; 2)$ • $C(-2; -1)$ • $D(1; -2)$ • $E(4; 2)$

2) Construire les points R, S et T tels que :

a) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}$ **c)** $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

3) Lire les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AR}$ **b)** $\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{AC}$ **d)** $\overrightarrow{AS}$ **e)** $\overrightarrow{ED}$ **f)** $\overrightarrow{DB}$ **g)** $\overrightarrow{CT}$ **h)** $\overrightarrow{BC}$

4) Quelles relations lient les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à celles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Partie 2 : vecteurs colinéaires

On considère un repère $(O; I, J)$.

1) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

a) $\vec{w} = 2\vec{u}$ **b)** $\vec{t} = -3\vec{v}$ **c)** $\vec{z} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

2) Un cas simple et pratique

a) Placer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) Que peut-on dire de ces coordonnées ?

3) Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont colinéaires ?

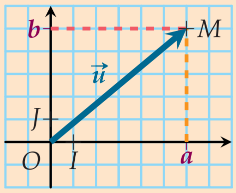
- $\vec{a}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ • $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ • $\vec{c}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ • $\vec{d}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ • $\vec{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur $\vec{u}$ qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.

On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère $(O; I, J)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

PREUVE Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.
Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

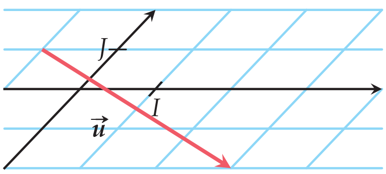
$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \\ \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

MÉTHODE 1 Lire les coordonnées d'un vecteur

► Ex. 12 p. 7

Exercice d'application

Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-dessous.



Correction

MÉTHODE 2 Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

► Ex. 16 p. 7

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6; 2)$ du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Correction

MÉTHODE 3 Repérer un point défini par une égalité vectorielle

► Ex. 18 p. 7

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on a les points $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$ et $C(5; 3)$.
Calculer les coordonnées
1) du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2) du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction

PROPRIÉTÉ : Somme de deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

alors les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

MÉTHODE 4 Repérer un point défini par une somme vectorielle

► Ex. 24 p. 8

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(5; 3)$ et $D(-2; -1)$.
Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

Correction

2. Multiplication par un réel

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ et λ un réel. La **multiplication de $\vec{u}$ par λ** est le vecteur $\lambda\vec{u}$ de coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$.

MÉTHODE 5 Repérer le produit d'un vecteur par un réel

► Ex. 35 p. 9

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1; 4)$ du vecteur $-0,5\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Correction

PROPRIÉTÉ

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et λ un réel tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

- si $\lambda > 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens et $AB = \lambda CD$.
- si $\lambda < 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires et $AB = -\lambda CD$.

REMARQUE : $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de λ.

3. Colinéarité

DÉFINITION

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**
si et seulement si leurs coordonnées dans un même repère sont proportionnelles.

REMARQUE : Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires lorsqu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

MÉTHODE 6 Vérifier la colinéarité de deux vecteurs

► Ex. 48 p. 10

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel λ non nul tel que $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$;

possibilité 2 vérifier que les produits en croix, xy' et $x'y$, sont égaux.

Exercice d'application

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles**
  si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple

$A(1;2)$; $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?

Correction

S'entraîner

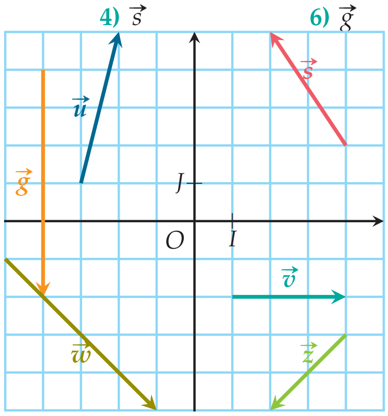
Activités mentales

1 Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour :

1) $A(2;5)$ et $B(6;7)$;
2) $A(-1;2)$ et $B(-2;-3)$.

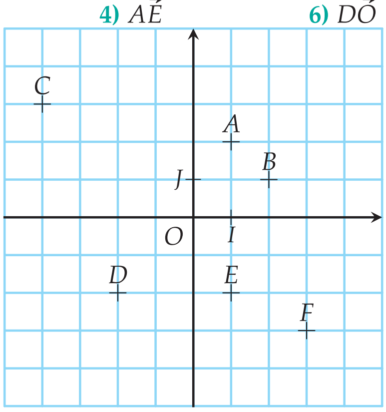
2 Lire les coordonnées des vecteurs.

1) $\vec{u}$ 3) $\vec{w}$ 5) $\vec{z}$
2) $\vec{v}$ 4) $\vec{s}$ 6) $\vec{g}$



3 Lire les coordonnées des points et des vecteurs.

1) A 3) $\overrightarrow{OC}$ 5) $\overrightarrow{FC}$
2) B 4) $\overrightarrow{AE}$ 6) $\overrightarrow{DO}$



4 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, celles du point $A(5;2)$.
Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

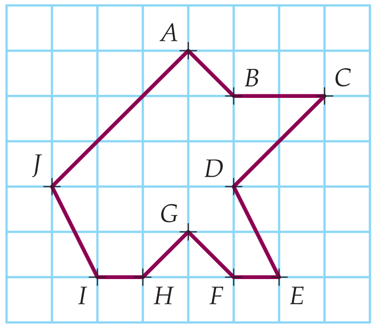
5 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, celles du point $A(1;-2)$.
Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{CA} = \vec{v}$.

6 Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $K(-2;-3)$, $L(3;-4)$ et $M(-1;5)$.
Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}$?

Opérations sur les vecteurs

7 Compléter les égalités en n'utilisant que les points de la figure ci-dessous.

1) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$
2) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{HF}$
3) $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$
4) $\overrightarrow{E\ldots} + \overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$
5) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$
6) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \vec{0}$



8 Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$
2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA}$
3) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$
4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}$
5) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
6) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

9 Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$
2) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$
3) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$
4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DB}$
5) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EC}$
6) $-\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{SH} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{MU}$

10 En utilisant le motif de l'exercice **7** : donner un vecteur égal à :

1) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HI}$
2) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB}$
3) $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IE}$
4) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$
5) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$
6) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{FE}$
7) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$
8) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CD}$

11 **Dans un parallélogramme...**

$EFGH$ est un parallélogramme de centre O.

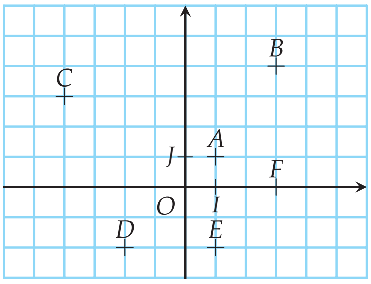
1) Construire les points S et T vérifiant :
   - $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$
   - $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$
2) Démontrer que $\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}$.
   Que peut-on en déduire ?

Coordonnées d'un vecteur

12 ► MÉTHODE 1 p. 3

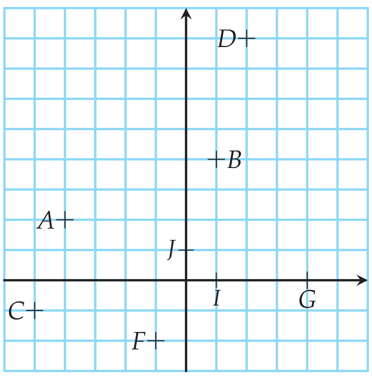
Lire les coordonnées des vecteurs suivants.

1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{CA}$ 5) $\overrightarrow{AE}$
2) $\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{DE}$ 6) $\overrightarrow{AF}$



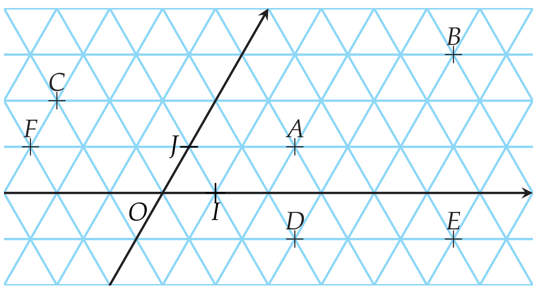
13 Dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous,

1) lire les coordonnées des points ;
2) calculer les coordonnées des vecteurs suivants.
   - $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{BJ}$ • $\overrightarrow{FA}$ • $\overrightarrow{GF}$
   - $\overrightarrow{AC}$ • $\overrightarrow{BD}$ • $\overrightarrow{FJ}$ • $\overrightarrow{BG}$
3) Dans cette liste, quels vecteurs sont égaux ? Lesquels sont opposés ?



14 Lire les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous.

1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{CA}$ 5) $\overrightarrow{AE}$
2) $\overrightarrow{AD}$ 4) $\overrightarrow{DE}$ 6) $\overrightarrow{CF}$



15 Construire un repère $(O; I, J)$ orthogonal.

1) Placer le point $A(-3; 4)$.
2) Construire un représentant du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
3) Placer les points B et C tels que :
   - $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ • $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$
4) Calculer les coordonnées des points B et C.
5) Que peut-on dire du point A ? Justifier.

16 ► MÉTHODE 2 p. 3

Construire un repère $(O; I, J)$ et tracer deux représentants du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'un d'origine I et l'autre d'extrémité J.

17 **Coordonnées de vecteurs**

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(1; 2)$, $B(-2; 5)$ et $C(-3; -3)$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

18 ► MÉTHODE 3 p. 4

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $E(2; -1)$, $F(-3; 4)$ et $G(1; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

19 **Parallélogramme**

Dans un plan muni d'un repère, on considère les points $A(3; 5)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -4)$ et $D(-1; 2)$.

Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

20 Construire un repère $(O; I, J)$ orthogonal.

1) Placer les points $A(3; -9)$ et $B(-1; -5)$.
2) Placer les points C et D tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme de centre I.
3) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.
   - $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{DC}$ • $\overrightarrow{AD}$

21 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(5; -6)$ et $(-2; 6)$.

Le point A est le milieu de $[BC]$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

22 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B et C respectivement de coordonnées $(1; 4)$, $(4; 6)$ et $(2; 3)$.

1) Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?
2) Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

S'entraîner

23 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées des points A, B et D sont respectivement $(-2;5)$, $(0;9)$ et $(8;0)$.

1) Quelles sont les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

2) Prouver que $ABCD$ est aussi un rectangle.

24 ► MÉTHODE 4 p. 4

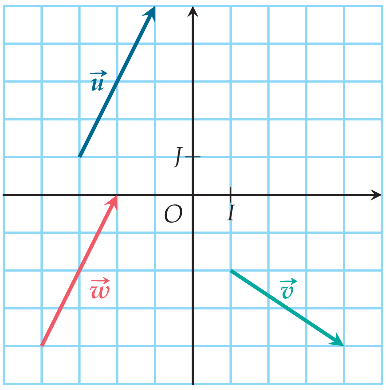
Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

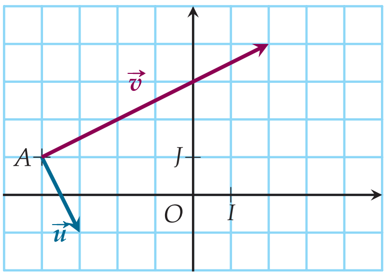
a) $\vec{u} + \vec{v}$ **c)** $\vec{u} + \vec{w}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$ **d)** $\vec{u} - \vec{w}$

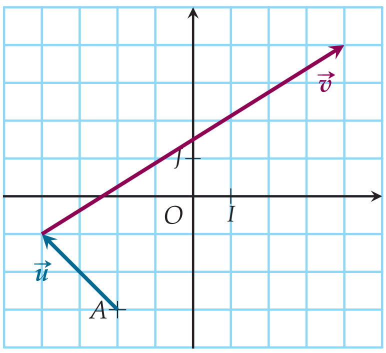


25 Reproduire la figure suivante et placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$.

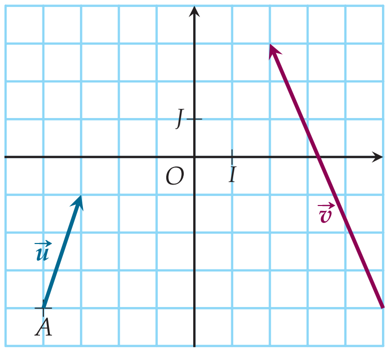
Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



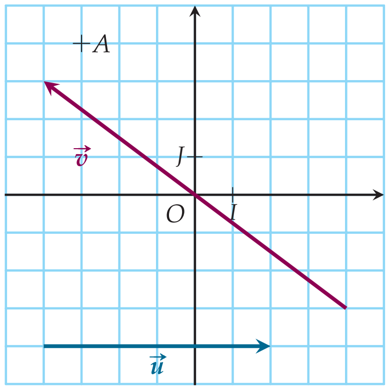
26 Même consigne que l'exercice **25**.



27 Même consigne que l'exercice **25**.



28 Même consigne que l'exercice **25**.



29 Reproduire la figure ci-dessous.

1) La compléter avec les points suivants.

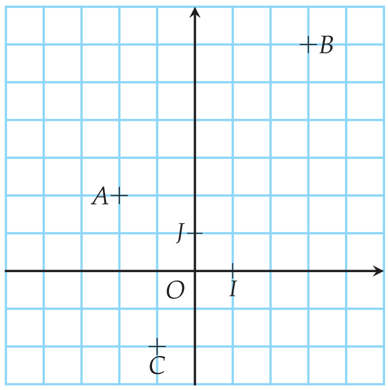
- $D(4,2)$
- $E(1;-2)$
- $F(-3;1)$

2) Placer les points G, H et K tels que :

- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$
- $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}$
- $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$

3) Lire leurs coordonnées.

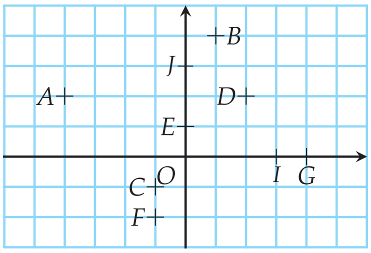
4) Les vérifier par le calcul.



30 Reproduire le graphique ci-dessous. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants et les représenter.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ **3)** $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}$ **5)** $\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{BD}$

2) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}$ **4)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ **6)** $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{CG}$



31 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(-2;3)$ • $C(3;2)$ • $E(-3;1)$ • $G(2;3)$
- $B(-1;-2)$ • $D(4;-2)$ • $F(3;-3)$ • $H(5;1)$

2) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un représentant de $-\overrightarrow{AB}$. Lire leurs coordonnées.

3) Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants et lire leurs coordonnées.

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$ **b)** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{GH}$

32 Dans le plan muni d'un repère, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées de $\vec{w}$, $\vec{m}$ et $\vec{z}$ tels que :

- $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$ • $\vec{u}-\vec{m}=\vec{v}$ • $\vec{z}-\vec{u}=\vec{v}$

33 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(0;0)$ • $C(2;-3)$ • $E(-3;1)$ • $G(1;5)$
- $B(1;-2)$ • $D(-5;-4)$ • $F(3;-3)$ • $H(-7;-2)$

2) Construire un représentant des vecteurs suivants et lire leurs coordonnées.

- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{DC}$, donne $\overrightarrow{DA}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{EF}$, donne $\overrightarrow{EH}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{BC}$, donne $\overrightarrow{GH}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $-\overrightarrow{AB}$, donne $\overrightarrow{EF}$.

34 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(-2;2)$ • $D(4;0)$ • $F(2;-2)$
- $C(3;3)$ • $E(-2;0)$

2) Calculer les coordonnées des points B, G, H et K qui vérifient les relations vectorielles suivantes.

- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$ • $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AD}$

Multiplication par un réel

35 ► MÉTHODE 5 p. 4

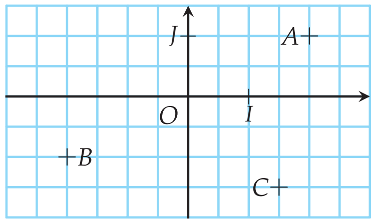
1) Reproduire la figure.

2) Construire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

- $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$ • $\vec{v}=-3\overrightarrow{BC}$ • $\vec{w}=0,5\overrightarrow{AB}$

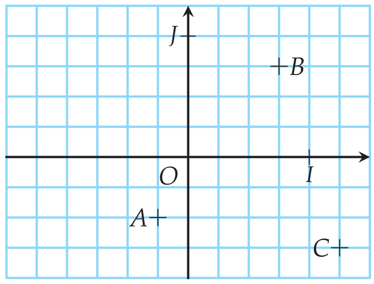
3) Lire leurs coordonnées.

4) Les vérifier par le calcul.



36 Même consigne qu'à l'exercice **35** avec :

- $\vec{u}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ • $\vec{v}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ • $\vec{w}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



37 Dans le plan muni d'un repère, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

1) $3\vec{u}$ **2)** $-4\vec{u}$ **3)** $\frac{2}{3}\vec{u}$ **4)** $-4,5\vec{u}$

38 Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on considère les points $P(-3;-1)$ et $R(2;3)$.

Quelles sont les coordonnées du point N qui vérifie l'égalité $\overrightarrow{ON}=4\overrightarrow{PR}$?

39 Dans un repère, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(3;-4)$ et $(-1;2)$. Quelles sont les coordonnées de C tel que $\overrightarrow{AB}=-5\overrightarrow{AC}$?

40 Dans un repère, on considère les points suivants :

$A\left(\frac{2}{9};\frac{6}{25}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{6};\frac{9}{20}\right)$.

Calculer les coordonnées de C tel que $\overrightarrow{AC}=\frac{15}{2}\overrightarrow{AB}$.

41 Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $E\left(\frac{5}{6};-\frac{3}{5}\right)$ et $F\left(-\frac{1}{8};\frac{7}{10}\right)$.
Quelles sont les coordonnées du point G pour que l'égalité $\overrightarrow{EG}=\frac{4}{7}\overrightarrow{EF}$ soit vérifiée ?

42 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(3;2)$, $(9;-5)$ et $(-9;16)$. Ces points sont alignés.
Calculer le nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

43 **Points et vecteurs**
Dans un repère, on considère les points suivants.
- $A(3;-1)$
- $B(-5;5)$
- $M(-1,2)$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2) Montrer que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$, λ réel à déterminer.
3) Que peut-on dire du point M ?

44 Soient les points $A(3;-2)$, $B(-1;7)$, $C(2;3)$.
1) Calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
2) Soit le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Calculer les coordonnées du point M.

45 **Construction et calculs**
Dans un repère on considère les points suivants.
- $A(3;-2)$
- $B(-1;2)$
- $C(2;3)$

1) Construire les vecteurs suivants.
a) $\overrightarrow{AB}$ c) $2\overrightarrow{AB}$ e) $2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{BC}$ d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ f) $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$
2) Vérifier leurs coordonnées par le calcul.

46 Dans un repère, on considère les points :
- $A(-3;2)$
- $B(1;-3)$
- $C(1;2)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :
a) $2\overrightarrow{AB}$ c) $2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BC}$
b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

47 **Avec des racines carrées**
Dans un repère, on considère les points suivants.
- $A(2\sqrt{2};3)$
- $C(\sqrt{2};-3)$
- $B(2;-\sqrt{2})$
- $D(3\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :
1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{CA}$ 4) $\overrightarrow{BD}$

Colinéarité

48 ► MÉTHODE 6 p. 5
Dans le plan muni d'un repère, les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$
2) $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$
3) $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$

49 Dans un repère orthogonal, placer les points :
- $A(-3;1)$
- $B(1;3)$
- $C(1,-4)$
- $D(7;-1)$

Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
1) (AB) et (CD)
2) (AC) et (BD)

50 Dans un repère orthogonal, placer les points :
- $A\left(-\frac{1}{3};0\right)$
- $B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$
- $C\left(\frac{4}{3};-1\right)$
- $D\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
1) (AB) et (CD)
2) (BC) et (AD)

51 **Vérification de parallélisme** ALGO
Proposer un algorithme qui vérifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles à partir des coordonnées des points A, B, C et D entrées par l'utilisateur.

52 Dans un repère, on considère les points S, E et L dont les coordonnées sont respectivement $(2;5)$, $(-4;-3)$ et $(5;9)$.
Les points S, E et L sont-ils alignés ?
Si oui, quelle égalité vectorielle lie $\overrightarrow{SE}$ et $\overrightarrow{SL}$?

53 Dans un repère orthogonal, les points M, E et R ont pour coordonnées respectives :
- $\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{8}\right)$
- $\left(\frac{5}{9};\frac{5}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7}{6};\frac{7}{6}\right)$

Les points M, E et R sont-ils alignés ?
Si oui, quelle égalité vectorielle lie $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MR}$?

54 **Vérification d'alignement** ALGO
Proposer un algorithme qui vérifie que les points A, B et C sont alignés à partir de leurs coordonnées entrées par l'utilisateur.

55 Dans le plan muni d'un repère, on considère les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ vérifiant l'égalité $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$?

56 Le plan est muni d'un repère.

1) Placer les points $V(-1;-1,5)$, $A(-2;0)$ et $T(5;0)$.
2) Placer E tel que $\overrightarrow{VA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{VE}$.
3) Placer U tel que $\overrightarrow{TU}$ ait pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\0,5\end{pmatrix}$.
4) Que peut-on dire des droites (OU) et (ET) ? Justifier.

57 Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(1;-2)$, $B(-3;1)$, $C(-17;15)$ et $D(-5;6)$.
Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

58 Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(3;-2)$, $B(-5;4)$ et $C(-2;-1)$.

1) Calculer les coordonnées de :
   - B' milieu de $[AC]$;
   - C' milieu de $[AB]$.
2) Prouver que $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3) Calculer les coordonnées de G vérifiant $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.
4) Les points B, G et B' sont-ils alignés ?
   Si oui, déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{BB'}$.

59 Construire un triangle ABC.

1) Placer les points M, P et N :
   a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
   b) $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA}$
   c) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MC}$
2) Prouver que $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PB}$.
   Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

60 Placer trois points A, B et C dans un repère.

1) Représenter les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que :
   - $\vec{a} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$
   - $\vec{b} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$
2) Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}$.
3) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \vec{b} - \overrightarrow{AC}$.
4) Prouver que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$.
   Que peut-on en déduire pour les points A, C et D ?
5) Prouver que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.
   Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABEC$?

61 Soit I le milieu d'un segment [AB].

1) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$?
2) Démontrer que $\overrightarrow{MI} = 0,5(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$ pour tout point M.

62 **Le petit chaperon rouge**

Le petit chaperon rouge rend visite à sa mère-grand dans les bois. Il doit d'abord se rendre au village pour récupérer un pot de beurre puis passer par la clairière pour faire un bouquet de fleurs.
Dans un repère $(O; I, J)$, on a représenté la maison du petit chaperon rouge par le point $D(-1;-2)$, le village par le point $V(2;1)$, la clairière par le point $C(3;0)$ et enfin la maison de mère-grand par le point $M(0;-3)$.

Partie A

1) Faire une figure qui sera complétée par la suite.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs de déplacement du petit chaperon rouge : $\overrightarrow{DV}$, $\overrightarrow{VC}$, $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{DM}$.

Partie B

1) Calculer les distances DV, VC, CM parcourues par le petit chaperon rouge depuis le village jusqu'à la maison de sa mère-grand, ainsi que la distance DM correspondant au trajet direct.
2) Montrer que le quadrilatère $DVCM$ sur lequel chemine le chaperon rouge est un rectangle.

Partie C

Le grand méchant loup fait peur au petit chaperon rouge. Afin de sécuriser la forêt, un chasseur part à la recherche de la tanière du loup. Une vielle sorcière lui dit qu'elle se situe au point T qui vérifie la relation
$\overrightarrow{CT} = 2\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{VM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DV}$.

On cherche maintenant les coordonnées du point T.

1) Placer le point T sur la figure en laissant les traits de construction apparents.
2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CT}$.
3) En déduire les coordonnées de T.

63 **Vers la droite d'Euler**

ABC est un triangle et A', B', C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1) Appliquer la formule établie à l'exercice **61** aux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
2) En déduire que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
3) On note G le centre de gravité de ABC.
   En déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Approfondir

64 Sommes algébriques dans une grille

Le réseau ci-dessous a un maillage rectangulaire.
Exprimer chacun des vecteurs suivants sous la forme d'un seul vecteur.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}$

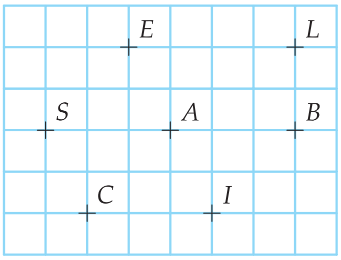
2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{LA}$

3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AL}$

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AE}$

5) $\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{IB}$

6) $\overrightarrow{AE}-\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{SC}\right)$



65 Sommes algébriques sans grille

Soit A, B, C et D quatre points quelconques.

1) Démontrer les égalités suivantes.

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

2) Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.

a) $\vec{u}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}\right)$

b) $\vec{v}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

66 Autour d'un triangle

Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU}=\overrightarrow{IR}+\overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV}=\overrightarrow{TI}+\overrightarrow{TR}$

1) Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2) Que peut-on conjecturer ?

3) a) Démontrer que $\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IT}+\overrightarrow{TR}$.

b) Conclure.

67 Autour d'un triangle (bis)

Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par :

- $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{RT}-\overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{RI}$
- $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{TI}$

1) Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

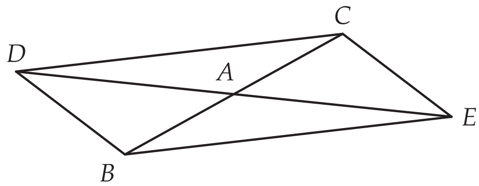
2) Que peut-on conjecturer ?

3) a) Démontrer que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}$.

b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

68 Vrai ou faux

$CDBE$ est un parallélogramme.
$[BC]$ et $[DE]$ sont sécants en A.



Des élèves ont écrit les phrases suivantes.
Indiquer celles qui sont fausses et les corriger pour qu'elles deviennent vraies.

1) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

2) A est le milieu $[DE]$ donc D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$.

3) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ donc A est le milieu de $[AC]$.

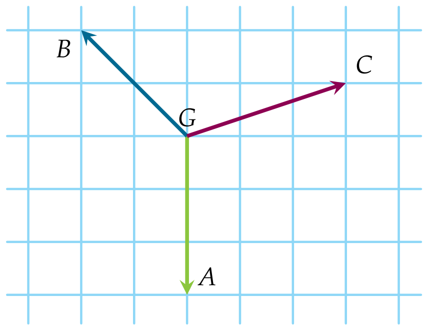
4) $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CB}$.

69 Forces

L'action de trois forces sur un objet est modélisée par l'action des trois vecteurs appliquée sur le point G qui représente le centre de gravité.

1) Recopier sur un quadrillage la figure ci-dessous.

2) Rajouter une force, c'est-à-dire un vecteur d'origine G, de telle sorte que la somme des forces soit égale au vecteur nul. L'objet est ainsi en équilibre.



70 Faire apparaître un point

Soit ABC un triangle et soit M un point quelconque du plan. On pose $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$.

Montrer que :

1) $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$

2) $\vec{v}=3\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{CB}$

3) $\vec{v}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

71 **Alignement**

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par :

- $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure.

2) Que peut-on conjecturer sur les points B, F et E ?

On choisit $(A; D, B)$ comme repère.

3) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

4) En déduire les coordonnées du point C.

5) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$?

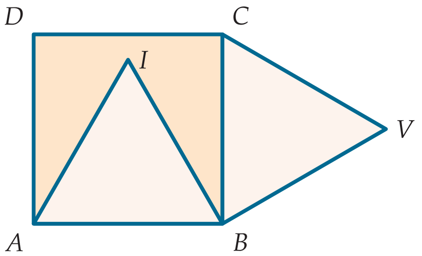
6) En déduire les coordonnées du point F.

7) Calculer les coordonnées du point E.

8) Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. Conclure.

72 **Un classique**

Sur la figure ci-dessous, on considère le carré $ABCD$ de côté 5 cm et les triangles équilatéraux ABI et BCV.



1) Construire la figure en vraie grandeur.

On se place dans le repère $(A; B, D)$.

2) Calculer les coordonnées des points I et V.

3) Démontrer que les points D, I et V sont alignés.

73 **Prendre des initiatives**

On considère un parallélogramme $OIJK$. Les points A, B et G sont définis par :

- $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OI}$
- $\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OK}$
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure.

2) Choisir un repère pour démontrer que les points O, G et J sont alignés.

74 On considère trois points dans un repère tel que :

- $A\left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{7}{12}\right)$
- $B\left(\dfrac{-3}{4}; \dfrac{5}{6}\right)$
- $C\left(\dfrac{-1}{6}; \dfrac{-14}{3}\right)$

Calculer les coordonnées des points D, E et F tel que :

1) ABDC soit un parallélogramme ;

2) ABEC soit un parallélogramme ;

3) AFBC soit un parallélogramme.

75 **Parallélisme** INFO

On considère un triangle OST tel que :

- T' est le milieu de $[OS]$;
- S' est milieu de $[OT]$;
- O' est le milieu de $[TS]$;
- Δ et Δ' sont les droites perpendiculaires à la droite (OS) respectivement en O et en S ;
- la droite $(S'T')$ coupe la droite Δ en un point X ;
- la droite (XT) coupe la droite Δ' en un point Y.

Partie A : conjecture

1) Avec un logiciel de géométrie, construire la figure.

2) Déplacer le point T. Que dire de (OT) et $(O'Y)$?

Partie B : un exemple

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, les coordonnées des points S et T sont respectivement $(6; 0)$ et $(2; 4)$.

1) Déterminer les coordonnées des points T', S' et O'.

2) Quelle est l'abscisse de X ?

3) En exprimant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{T'S'}$ et $\overrightarrow{T'X}$, calculer l'ordonnée de X.

4) Vérifier que le point Y a pour coordonnées $(6; 6)$.

5) Vérifier la conjecture de la partie **A**.

76 **Colinéarité ?** ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous qui vérifie si deux vecteurs $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$ sont colinéaires.

```
1.  Liste des variables utilisées
2.    a,b,c,d : nombres
3.  Entrées
4.    Demander a, b, c, d
5.  Traitements
6.    Si ··· Alors
7.      Afficher ('colinéaires')
8.    Sinon
9.      Afficher ('non colinéaires')
10.   Fin Si
```

1) Compléter la ligne 6.

2) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il décide si 3 points sont alignés à partir de leurs coordonnées.

3) Les points suivants sont-ils alignés ?

a) $A(2; -7)$, $B(-2; 3)$ et $C(1; -7,5)$

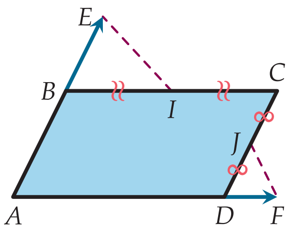
b) $J(0; 1)$, $K\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $L\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

Approfondir

77 Avec des paramètres

Soit $ABCD$ un parallélogramme. I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$. a et b sont deux nombres réels et on considère les points E et F définis par

- $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{CF} = b\overrightarrow{AD}$



On se place dans le repère $(A; D, B)$.

1) Calculer en fonction de a et de b :
   a) les coordonnées des points E et F ;
   b) les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$.
2) Établir une relation entre a et b afin que les droites (EI) et (FJ) soient parallèles.

78 Parallélisme et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.
Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure.
2) Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).
3) Démontrer que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.
4) Conclure.

79 Milieu et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.
Les points P et Q sont définis par :

- $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure.
2) Que peut-on conjecturer sur le point Q ? Et sur B ?
3) Démontrer que $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
   En déduire la position du point B.
4) Exprimer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
   En déduire la position du point C.

80 Parallélogramme et alignement

On considère un parallélogramme $ABCD$.

1) Construire les points M et N définis par :
   - $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
2) Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4) Montrer que les points C, M et N sont alignés.

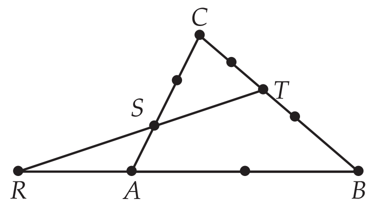
81 Médiane et calcul vectoriel

On considère un triangle MUV et I le milieu de $[UV]$.

1) Faire une figure.
2) Que dire de la somme vectorielle $\overrightarrow{IU} + \overrightarrow{IV}$? Justifier.
3) Démontrer que $\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV} = 2\overrightarrow{MI}$.

82 Points alignés : deux méthodes

On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).



À partir de la figure, déterminer les valeurs des réels α, β et γ tels que :

- $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \gamma\overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant deux méthodes.

Partie A : méthode géométrique

Dans cette partie, on utilise des égalités vectorielles.

1) Montrer que
   a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

Partie B : méthode analytique

On considère le repère $(A; B, C)$.

1) Donner les coordonnées des points suivants : A, B, C, S et R.
2) Calculer les coordonnées du point T.
3) Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{15}\right)$.
4) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires.
5) Conclure.

83 Pour aller plus loin

On considère le triangle ABC et a un nombre réel. M, S et T sont définis par :

- $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$

Trouver la position du point M sur la droite (AB) afin que les points S, T et M soient alignés.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Géométriquement

- Construire l'image d'une figure par une translation
- Construire un représentant d'un vecteur défini par
  - une translation
  - la somme ou la différence de vecteurs
  - le produit d'un vecteur par un nombre
- Utiliser la relation de Chasles

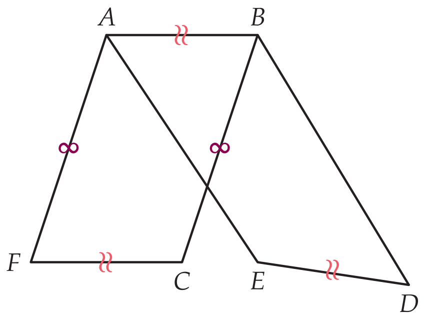
Analytiquement

- Calculer les coordonnées :
  - d'un vecteur à partir des coordonnées de deux points
  - de la somme ou la différence de deux vecteurs
  - du produit d'un vecteur par un nombre
  - d'un point défini par une condition vectorielle
- Reconnaître et utiliser la colinéarité de deux vecteurs

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net @

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.



84 L'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point :

ⓐ C ⓑ E

85 L'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$

ⓐ est F

ⓑ n'est pas tracée sur la figure

86 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

ⓐ vrai ⓑ faux

87 $AB + BD = AD$

ⓐ vrai ⓑ faux

88 $ABDE$ est un parallélogramme.

ⓐ vrai ⓑ faux

89 $FCBA$ est un parallélogramme.

ⓐ vrai ⓑ faux

90 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD}$

ⓐ vrai ⓑ faux

91 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$

ⓐ vrai ⓑ faux

92 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$

ⓐ vrai ⓑ faux

93 $DE = BA$

ⓐ vrai ⓑ faux

94 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}$

ⓐ vrai ⓑ faux

95 $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

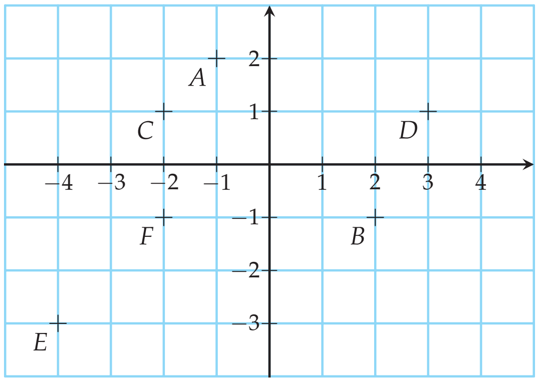
ⓐ vrai ⓑ faux

96 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$

ⓐ vrai ⓑ faux

97 $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

ⓐ vrai ⓑ faux



98 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

99 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

100 Les coordonnées du vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FE}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

101 Les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{FA}$ sont :

(a) $(1;3)$ (b) $(3;2)$ (c) $(2;3)$ (d) $(1;-4)$

102 Les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD}$ sont :

(a) $(-8;-2)$ (b) $(0;4)$ (c) $(4;-2)$ (d) $(-2;8)$

103 Les coordonnées du point I tel que $ACBI$ soit un parallélogramme sont :

(a) $(-1;1)$ (b) $(3;0)$ (c) $(1;-2)$ (d) $(-5;4)$

104 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

105 Les coordonnées du vecteur $\vec{k}$ tel que $\vec{k} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

106 Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est colinéaire au vecteur :

(a) $\overrightarrow{CA}$ (b) $\overrightarrow{AC}$ (c) $\overrightarrow{BD}$ (d) $\overrightarrow{ED}$

107 Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est colinéaire au vecteur :

(a) $\overrightarrow{AD}$ (b) $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{z}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

SOLUTIONS

Chapitre G3

Vecteurs : Coordonnées et colinéarité

S'entraîner

1

1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

2

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4) $\vec{s}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{z}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ 6) $\vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

3

1) $A(1;2)$ 4) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) $B(2;1)$ 5) $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 6) $\overrightarrow{DO}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4 $B(3;5)$

5 $C(-3;3)$

6 $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

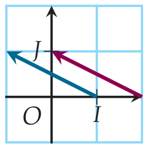
12

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

16



18 $H(6;-1)$

24

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2)

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

35

$\vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -10,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

48

1) oui 2) non

3) oui

Auto-évaluation QCM

84 a	**85** b
86 a	**87** b
88 b	**89** a
90 a	**91** b
92 b	**93** a
94 a	**95** b
96 a	**97** b
98 c	**99** d
100 d	**101** b
102 a	**103** b
104 c	**105** d
106 a b	**107** b c