FONCTIONS

3

Fonctions affines et équations de droites

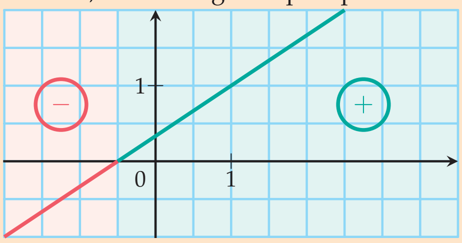
Cours - Méthodes

1. Signe d'une fonction affine

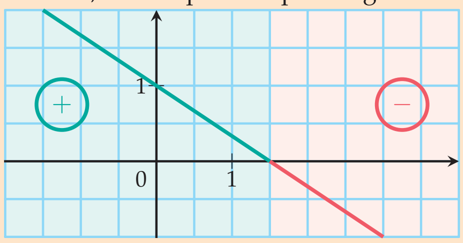
PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
La **fonction affine** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son domaine de définition pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si $a > 0$, elle est négative puis positive.



Si $a < 0$, elle est positive puis négative.



MÉTHODE 0 Dresser le tableau de signes d'une fonction affine

Le tableau de signes d'une fonction affine comporte deux lignes.
Sur la **première ligne** on indique les bornes du domaine de définition de la fonction et la valeur qui annule la fonction.
Sur la **deuxième ligne**, par des pointillés verticaux sous la valeur qui annule, on crée deux cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction.

Exercice d'application

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -3x + 4$.

Correction

Le coefficient directeur, -3, est négatif donc g est décroissante.
Recherche de la valeur qui annule :

$-3x + 4 = 0$ soit $x = \dfrac{-4}{-3}$ soit $x = \dfrac{4}{3}$.

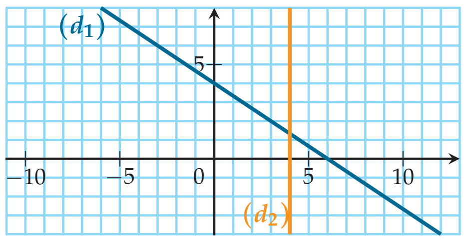
x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	0	$-$	

2. Équations de droites

MÉTHODE 1 Trouver l'équation réduite d'une droite par lecture graphique

- Si la droite est **verticale**, il suffit de lire c, l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses. L'équation réduite de la droite est alors $x = c$.
- Sinon, l'équation réduite de la droite est de la forme $y = mx + p$.
  - p est l'**ordonnée** du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
  - m est l'**accroissement des ordonnées** (positif ou négatif) lorsque l'on passe d'un point de la droite à un autre point dont l'abscisse est augmentée d'une unité.

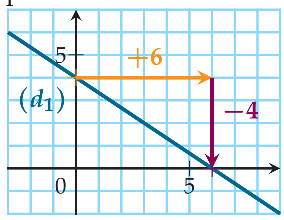
Exercice d'application Quelles sont les équations des droites (d_1) et (d_2) ?



Correction

- La droite (d_1) **n'est pas parallèle** à l'axe des ordonnées donc son équation réduite est de la forme $y = mx + p$.

Elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $A(0;4)$ donc $p = 4$.
Pour déterminer m, on choisit un autre point de la droite de coordonnées entières.



$m = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

L'équation de la droite (d_1) est : $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

- La droite (d_2) est **parallèle** à l'axe des ordonnées. Elle coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(4;0)$.
L'équation de la droite (d_2) est $x = 4$.

MÉTHODE 2 Trouver l'équation réduite d'une droite par le calcul

Lorsque l'on connaît les coordonnées $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ de deux points distincts d'une droite,

- si $x_1 = x_2$, la droite est **parallèle** à l'axe des ordonnées.
  Son équation réduite est $x = x_1$.
- si $x_1 \neq x_2$, la droite **n'est pas parallèle** à l'axe des ordonnées.
  Son équation réduite est de la forme $y = mx + p$.
  - Le **coefficient directeur** se calcule comme suit : $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ou $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
  - On calcule **l'ordonnée à l'origine** p avec les coordonnées de l'un ou l'autre des points en résolvant une équation d'inconnue p : $y_1 = mx_1 + p$ ou $y_2 = mx_2 + p$.

Exercice d'application Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(4;6)$ et $(1;-2)$.
Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

Correction

$A(4;6)$ et $B(1;-2)$ n'ont pas la même abscisse. Donc la droite (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

$m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ soit $m = \dfrac{6-(-2)}{4-1} = \dfrac{8}{3}$.

Ensuite, p est solution de $y_A = mx_A + p$ soit

$6 = \dfrac{8}{3} \times 4 + p$ donc $p = 6 - \dfrac{32}{3} = -\dfrac{14}{3}$.

L'équation réduite de (AB) est $y = \dfrac{8}{3}x - \dfrac{14}{3}$.

Cours - Méthodes

3. Représentation graphique d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ : Représentation graphique d'une fonction affine

Soit m et p deux nombres réels et f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.
Les coordonnées $(x; y)$ de tous les points de la représentation graphique de la fonction f sont liées par la relation $y = mx + p$. Il s'agit d'une droite **non parallèle** à l'axe des ordonnées.
Si $m = 0$, la fonction est dite **constante** et sa représentation graphique a pour équation $y = p$.
Si $p = 0$, la fonction est **linéaire** et sa représentation graphique a pour équation $y = mx$.

MÉTHODE 3 Construire la courbe représentative d'une fonction affine

Exercice d'application Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = -2x + 5$.

Correction La fonction f est affine, sa représentation graphique est une droite et il suffit de connaître deux de ses points.

x	0	3
$f(x)$	5	-1
Points à placer	$A(0;5)$	$B(3;-1)$