FONCTIONS

2

Variations de fonctions

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Calculer l'image d'un nombre par une fonction
- Lire une image par une fonction sur un graphique
- Reconnaître une fonction affine
- Connaître les effets des opérations sur l'ordre des nombres

Cours - Méthodes

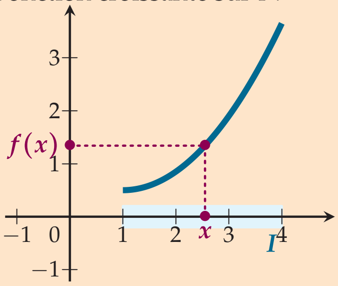
1. D'un point de vue graphique

A. Fonction croissante, décroissante, constante

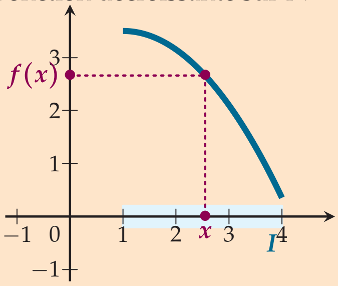
DÉFINITION : Intuitive

- On dit que f est **croissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ augmente.
- On dit que f est **décroissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.

Fonction croissante sur I :

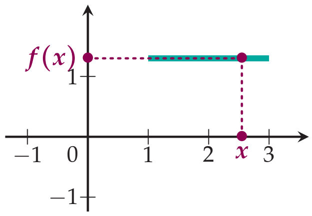


Fonction décroissante sur I :



REMARQUES : Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On voit sur un graphique que :

- f est croissante sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ « **monte** » sur I ;
- f est décroissante sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ « **descend** » sur I.
- Lorsque sur un intervalle, la courbe est **horizontale**, on dit que la fonction est **constante**. On considère qu'elle est à la fois croissante et décroissante.
- Une fonction **qui ne change pas de sens de variations** sur un intervalle est dite **monotone** sur cet intervalle.



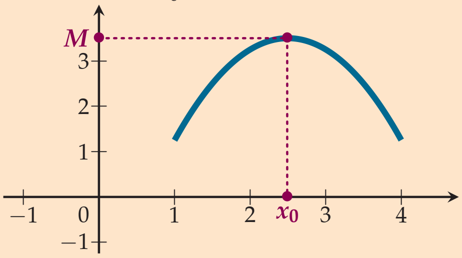
B. Maximum et minimum d'une fonction

DÉFINITION : Intuitive

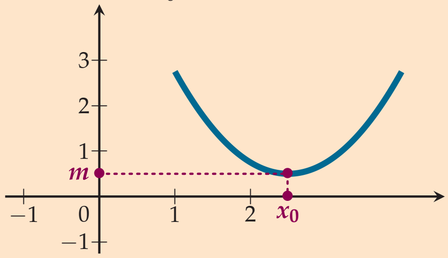
Sur un intervalle I,

- le **maximum** d'une fonction f est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$;
- le **minimum** d'une fonction f est la plus petite des valeurs prises par $f(x)$.

Maximum en x_0



Minimum en x_0



■ DÉFINITION : **Tableau de variations**

Un **tableau de variations** regroupe toutes les informations concernant les variations d'une fonction sur son domaine de définition.

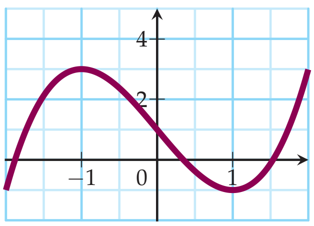
MÉTHODE 1 Dresser un tableau de variations

Un tableau de variations comporte deux lignes.

- Aux extrémités de la 1e ligne, on trouve les **bornes** du domaine de définition de la fonction. Entre les bornes, on place d'**éventuelles** valeurs particulières.
- Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la 2e ligne par **une ou plusieurs flèches** sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.
- Les valeurs pour lesquelles la fonction **n'est pas définie** sont indiquées par une double barre verticale sur la deuxième ligne.
- On indique **au bout des flèches** les images des valeurs de la 1re ligne.

Exercice d'application

Dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $[-2;2]$ par la courbe ci-dessous.



Correction

x	-2		-1		1		2
$f(x)$		↗	3	↘	-1	↗	

2. D'un point de vue algébrique

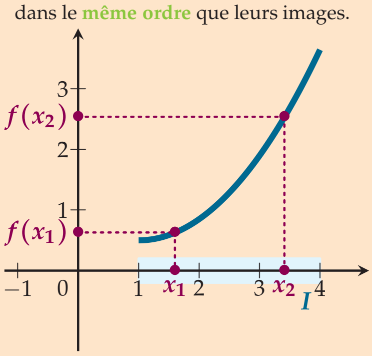
A. Variations d'une fonction

■ DÉFINITION : **Croissance, décroissance sur un intervalle**

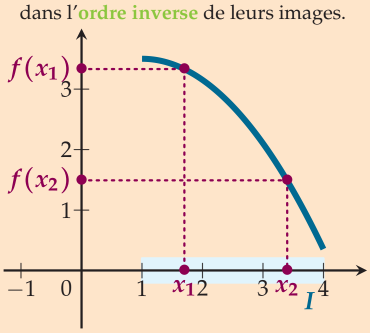
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_1 et x_2 deux nombres de I.

- Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ alors f est dite **croissante** sur I.
- Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ alors f est dite **décroissante** sur I.

f est croissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans le **même ordre** que leurs images.



f est décroissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans l'**ordre inverse** de leurs images.



PROPRIÉTÉ : Tableau de variations des fonctions affines et de la fonction inverse

Le sens de variation de la fonction affine dépend du signe de a.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax+b$ avec $a>0$		↗	

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax+b$ avec $a<0$		↘	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

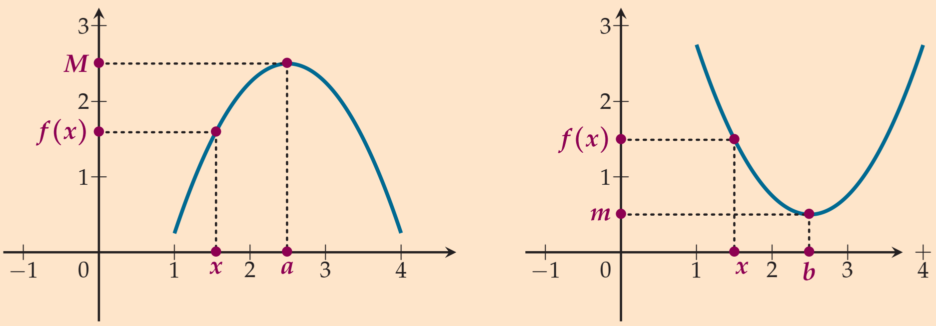
PREUVE

- On considère une fonction f tel que $f(x) = ax + b$ et deux nombres tels que $x_1 < x_2$.
  Si $a < 0$, $ax_1 > ax_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
  Si $a > 0$, $ax_1 < ax_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
- La preuve du sens de variation de la fonction inverse est l'objet de l'exercice ??.

B. Maximum et minimum d'une fonction

DÉFINITION : Maximum, minimum et extremum d'une fonction

- Dire que f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leqslant M$ et $M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** en b sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geqslant m$ et $m = f(b)$
- Un **extremum** est le terme générique pour désigner un maximum ou un minimum.



PROPRIÉTÉ : Tableau de variations de la fonction carrée

- La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Elle admet, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

PREUVE La preuve est l'objet de l'exercice ??.

1 Lecture de variations

Dresser le tableau de variations des fonctions f, g, h, k, $\sin(x)$ et $\cos(x)$ ci-dessous. (on donne $A\,(a;k\,(a))$ et $B\,(b;k\,(b))$ pour permettre de construire correctement le tableau de variations de la fonction k)