

Généralités sur les fonctions

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- ▶ Évaluer la valeur d'une expression littérale
- ▶ Résoudre des équations
- ▶ Placer des points dans un repère
- ▶ Lire les coordonnées d'un point dans un repère



1. Définitions

■ DÉFINITION : Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction est l'ensemble des nombres pour lesquels on peut trouver une image par cette fonction.

NOTATION : On le note \mathcal{D}_f pour la fonction f .

Exemple Activité 0

La fonction h correspondant au niveau de l'eau du Gardon avait pour ensemble de définition $\mathcal{D}_h = [0; 24]$ car l'ensemble des relevés avaient été faits entre minuit (0h) et minuit (24h) le 28 octobre.

Exemple Activité 1

Dans ce cas, $\mathcal{D}_a = [0; 21]$. La fonction qui, à la longueur AM , associait l'aire du quadrilatère $MNPQ$ était définie pour toutes les valeurs de AM comprises entre 0 et 21. Prendre une longueur négative n'a pas de sens, et au delà de 21 était incohérent avec notre problème !

■ DÉFINITION : Fonction

Définir une **fonction** f revient à associer, à chaque nombre de son ensemble de définition, un nombre $f(x)$ et un seul, appelé **image** de x par f .

Exemple

- **Activité 0**

À chaque valeur de son ensemble de définition \mathcal{D}_h , la fonction h associait une hauteur d'eau.

- **Activité 1**

À chaque valeur de \mathcal{D}_a , la fonction a associait une aire du quadrilatère.

2. Différentes représentations d'une fonction

■ DÉFINITION : Expression d'une fonction

Soit f une fonction, \mathcal{D} son ensemble de définition et $x \in \mathcal{D}$. L'**expression algébrique** d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x .

Exemple Activité 0

L'expression algébrique de la fonction a rencontrée dans l'activité sur le quadrilatère tournant est : $a(x) = 2x^2 - 50,7x + 623,7$.

Exemple

Activité 2

Prenons le premier programme :

- Choisir un nombre,
- lui ajouter 4,
- multiplier le résultat par 5.

Trouver l'expression définissant cette fonction.

Correction

On note f la fonction qui à un nombre x , lui associe le résultat du programme de calcul.

Après avoir choisi un nombre x , le programme lui ajoute 4.

On obtient donc $x + 4$.

Ensuite le programme multiplie ce résultat par 5, on obtient : $5 \times (x + 4)$.

Donc la fonction liée à ce programme de calcul est définie par : $g : x \mapsto 5 \times (x + 4)$.



■ DÉFINITION : Tableau de valeurs

Soit f une fonction, \mathcal{D} son ensemble de définition et x un élément de \mathcal{D} .

Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

REMARQUE : Un tableau de valeurs n'est pas unique.

Il dépend du choix des valeurs de x sur la première ligne (ou colonne).

MÉTHODE 1 Construire un tableau de valeurs

Exercice d'application Dresser un tableau de 15 valeurs de la fonction a de l'activité sur le quadrilatère tournant définie par $a(x) = 2x^2 - 50,7x + 623,7$ à partir de $x = 0$ avec un pas de 1,5.

Correction Le pas de 1,5 signifie qu'il y a une différence de 1,5 entre chaque valeur de x de la première ligne.

x	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5
$a(x)$	623,7	552,15	489,6	436,05	391,5	355,95	329,4	311,85

x	12	13,5	15	16,5	18	19,5	21
$a(x)$	303,3	303,75	313,2	331,65	359,1	395,55	441

■ DÉFINITION : Courbe représentative d'une fonction

La **courbe représentative de la fonction** f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition \mathcal{D} de la fonction f .

Elle est souvent notée \mathcal{C}_f .

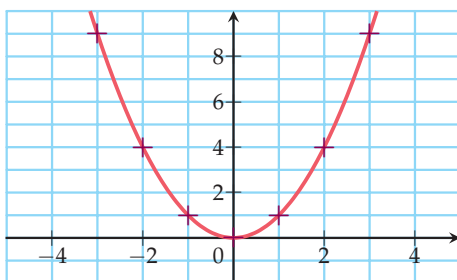
L'équation de cette courbe représentative est : $y = f(x)$.

MÉTHODE 2 Tracer une courbe représentative

Exercice d'application Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

Correction On établit un tableau de valeurs de la fonction f , on reporte les coordonnées des points dans un repère puis on les relie à la main.

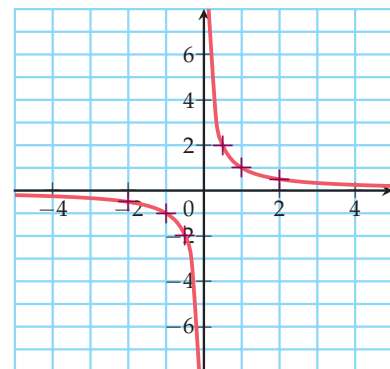
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Exercice d'application Tracer la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$.

Correction

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$	-0,5	-1	-2	∞	2	1	0,5





3. Image et antécédent

■ DÉFINITION

- Soit $a \in \mathcal{D}$. L'**image** du nombre a par la fonction f est **unique** et se note $f(a)$.
 $f(a)$ se lit « f de a ». La notation suivante se rencontre également $f : a \mapsto f(a)$.
- Si b est l'image de a , on a l'égalité $f(a) = b$ et a est un **antécédent** de b par la fonction f .

NOTATION : $a \in \mathcal{D}$ signifie « a appartient à \mathcal{D} ».

Exemple Activité 0

L'image de 10,5 était 1,6

→ À dix heures et demie, la hauteur d'eau était de 1m60.

1,6 avait deux antécédents : 10,5 et 21

→ La hauteur d'eau était de 1m60 à dix heures et demie et 21h.

Exemple Activité 1

L'image de 18 par la fonction a était 359,1.

→ Pour $AM = 18\text{cm}$, l'aire était de 359,1 cm^2 .

359,1 avait deux antécédents : 18 et 7,35.

→ L'aire de 359,1 cm^2 était obtenue pour deux valeurs de AM . $AM = 18\text{cm}$ et $AM = 7,35\text{cm}$

4. Fonctions de référence

■ DÉFINITION : Fonctions de référence

Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

- La **fonction carrée** est la fonction qui à x associe x^2 .
Elle est définie sur \mathbb{R} .
- La **fonction inverse** est la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$.
Elle est définie sur \mathbb{R}^* .
- Une **fonction affine** est une fonction qui à x associe $mx + p$ (avec m et p réels).
Elle est définie sur \mathbb{R} .

VOCABULAIRE :

- La courbe représentative de la fonction carrée est appelée parabole.
- Celle de la fonction inverse est appelée hyperbole.

NOTATIONS :

- Quand un intervalle contient des nombres aussi grands (aussi petits) que l'on veut, le symbole $+\infty$ ($-\infty$) remplace la borne.
- \mathbb{R}^+ note l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. C'est l'ensemble $[0; +\infty[$.
- \mathbb{R}^- note l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. C'est l'ensemble $] -\infty; 0]$.
- \mathbb{R}^* ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ note l'ensemble des nombres non nuls. C'est l'ensemble $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.



5. Détermination d'images et d'antécédents

MÉTHODE 3 Calculer des images à partir d'une expression littérale

► Ex. 124 p. 7

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^5 + 6x^2 - 9$.
Calculer les images de 0 et de -1 par la fonction f .

Correction

0 et -1 appartiennent à \mathbb{R} , l'ensemble de définition de f .
 $f(0) = 4 \times 0^5 + 6 \times 0^2 - 9 = -9$
 $f(-1) = 4 \times (-1)^5 + 6 \times (-1)^2 - 9 = -4 + 6 - 9 = -7$
Les images de 0 et -1 par f sont respectivement -9 et -7 .

MÉTHODE 4 Rechercher un (ou des) antécédent(s) par le calcul

► Ex. 125 p. 7

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x - 5$.
Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 16 par la fonction f .

Correction

On note x un nombre dont l'image est 16.
 x est solution de l'équation $f(x) = 16$ soit $3x - 5 = 16$.
 $3x = 16 + 5 = 21$ donc $x = 21 \div 3 = 7$
 $7 \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f .
Donc, 7 est l'unique antécédent de 16 par la fonction f .

REMARQUES :

- Calculer l'**image** d'un nombre, c'est **évaluer** la valeur d'une expression littérale.
- Calculer le (ou les) **antécédent(s)** d'un nombre, c'est **résoudre** une équation.

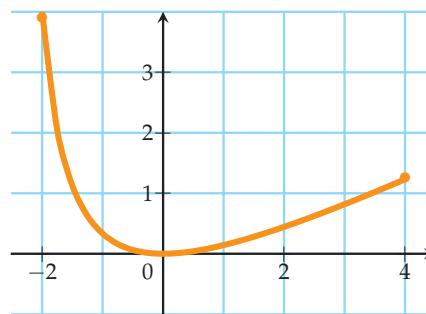
MÉTHODE 5 Lire graphiquement une image et des antécédents

► Ex. 126 p. 8

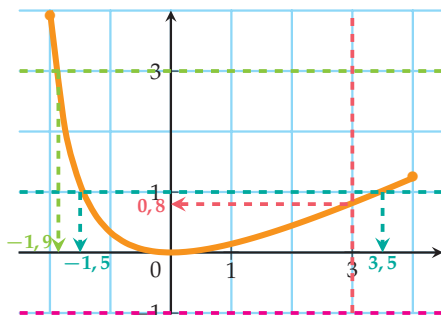
Exercice d'application

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.

- 1) Quelle est l'image de 3 par f ?
- 2) Par f , quels sont les antécédents de :
 - -1 ?
 - 1 ?
 - 3 ?



Correction



Par lecture graphique,

- 1) **L'image de 3** par f est environ 0,8.
- 2) • **-1 n'a pas d'antécédent** par f .
- **1 a deux antécédents** par f : environ $-1,5$ et $3,5$.
- **3 a un unique antécédent** par f : environ $-1,9$.



Activités mentales

101 Calculer $f(2)$ pour la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

102 La fonction g est définie par $g(x) = -3x + 7$. Quelle est l'image de deux tiers par g ?

103 h est définie par $h(x) = (2x - 6)(2x + 1)$. Calculer $h(3)$.

104 Voici un tableau de valeurs de la fonction l . Par la fonction l , donner :

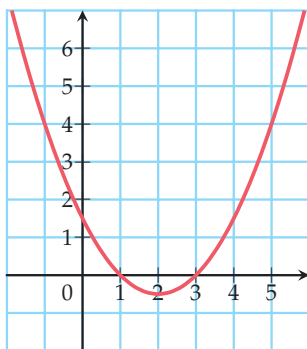
- 1) l'image de -5 ; 2) un antécédent de -1 .

x	2	-5	10	-1
$l(x)$	-1	4	-1	-5

105 La fonction m est définie sur \mathbb{R} par $m(x) = 3x - 5$. Quel est l'antécédent de 4 ?

106 Voici la courbe représentative d'une fonction h .

- 1) Déterminer les images de :
 a) 3 b) 5 c) 0 d) -1
- 2) Déterminer les antécédents de 4 par h .



107 On donne $l(3) = 5$. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de la fonction l .

108 Le point $A(-1; 2)$ appartient à la courbe représentative de la fonction k . Compléter : $k(\dots) = \dots$

109 Le point $A(2; 1)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction m définie par $m(x) = 3x^2 - 2x + 1$?

110 Dans un repère, quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse -2 appartenant à la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x - 2$?

Tableaux de valeurs

111 ► MÉTHODE 1 p. 3

Soit une fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x - 2$ sur $[-3; 3]$. Construire un tableau de valeurs de la fonction f comportant au moins cinq valeurs de x .

112 Avec l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction r définie sur $[-10; 10]$ par $r(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ avec un pas de 1.

113 On définit f par $f(x) = -3x + 5$ sur \mathbb{R} . Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0		2		-4
$f(x)$		0		2	

114 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{3\sqrt{2x + 1}}$$

- 1) Dresser le tableau de valeurs de f pour x entre 0 et 10 avec un pas de 1. Arrondir les images à 10^{-2} près.
- 2) Dresser le tableau de valeurs de f pour x entre 7 et 9 avec un pas de 0,5. Arrondir les images à 10^{-1} près.

115 Déterminer a pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d'une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + 9$ sur \mathbb{R} puis compléter le tableau.

x	-1	0	1	
$h(x)$	4		16	36

116 Déterminer a et b pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d'une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + b$ sur \mathbb{R} .

x	-1	0	1	2
$h(x)$	-9	-7	-3	3

117 En utilisant le tableau ci-dessous, répondre par vrai ou faux aux affirmations.

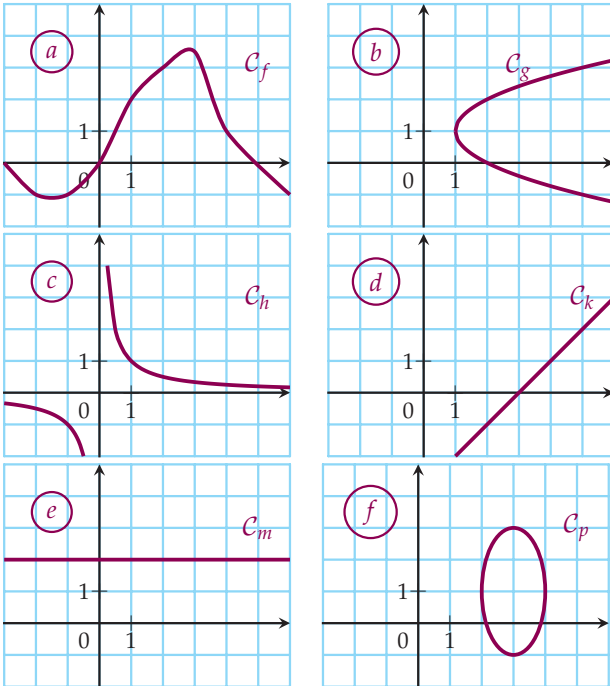
x	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{2}{11}$
$h(x)$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{6}{5}$

- 1) $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{11}$ ont des images opposées ;
- 2) $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{2}$ ont des antécédents inverses.

Représentations graphiques

118 Fonctions ?

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



119 ► MÉTHODE 2 p. 3

Tracer la courbe représentative de f définie par $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ sur \mathbb{R} pour x entre -4 et 4 .

120 Tracer une ou des courbes ?

Soit f la fonction définie sur $]0; 3]$ par $f(x) = \frac{3}{x} - 2$.

- Établir un tableau de valeurs avec un pas de $0,25$.
- Tracer la courbe représentative de la fonction f .

121 Un ou des tableaux de valeurs ?

En voulant tracer une courbe, Roméo a obtenu le tableau de valeurs suivant :

x	-1,6	-1,3	-1,1	0,17	0,32	0,89
$f(x)$	-0,62	-0,77	-0,91	5,88	3,12	1,12

En traçant la même courbe, Juliette a obtenu le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	-0,33	-0,5	-1	1	0,5	0,33

Tracer une courbe représentative de la fonction. Donner son nom.

122 Avec la calculatrice

Soit f définie sur $[-4; 2]$ qui à x associe $\frac{2x + 2}{x + 5}$.

- Éditer un tableau de valeurs de f avec la calculatrice.
- Tracer la courbe représentative C_f de f .
- Vérifier le tracé sur l'écran de la calculatrice.

123 Feuille changeante

INFO

- Programmer une feuille de calcul d'un tableur pour obtenir un tableau de valeurs entre -5 et 5 avec un pas de 1 et la courbe représentative associée de n'importe quelle fonction f définie par $f(x) = ax^2 + b$ où l'utilisateur pourra choisir a et b .
- Utiliser la feuille de calcul pour $a = \frac{3}{5}$ et $b = -\sqrt{2}$.

Calculs d'images et d'antécédents

124 ► MÉTHODE 3 p. 5

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 7x$. Calculer les images de :

- 2
- 3
- 0
- $\sqrt{5}$

125 ► MÉTHODE 4 p. 5

On définit deux fonctions k et l , définies sur \mathbb{R} , par :

$$k(x) = 2x + 3 \text{ et } l(x) = x^2.$$

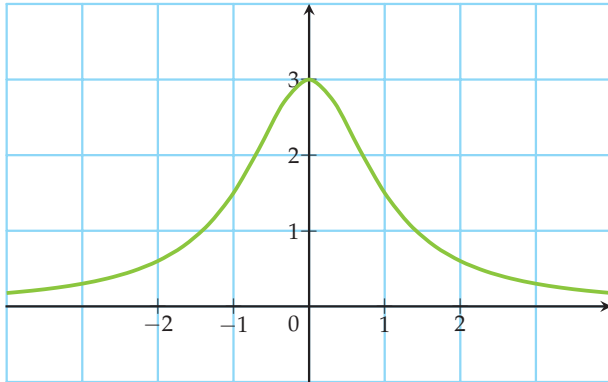
- Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction k .
- Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par la fonction l .
- Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent par l .



Lectures graphiques

126 ▶ MÉTHODE 5 p. 5

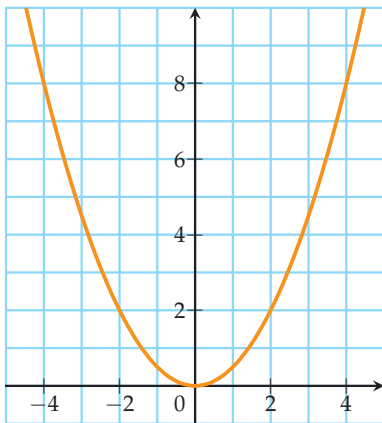
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



Par lecture graphique, déterminer :

- 1) l'image de -1 par f ;
- 2) l'image de 0 par f ;
- 3) le (ou les) antécédent(s) de 1 par f ;
- 4) le (ou les) antécédent(s) de 3 par f .

127 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



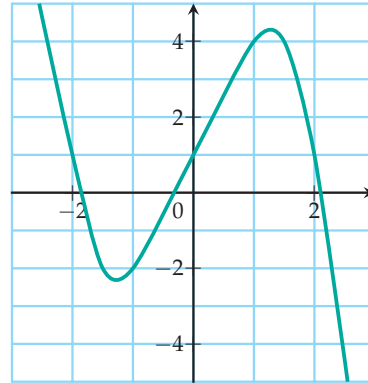
1) Par lecture graphique, compléter les égalités suivantes :

- a) $f(\dots) = 4$ c) $f(\dots) = 0,5$
 b) $f(2) = \dots$ d) $f(0) = \dots$

2) Par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-3	-1		1		
$f(x)$			2		7	5

128 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



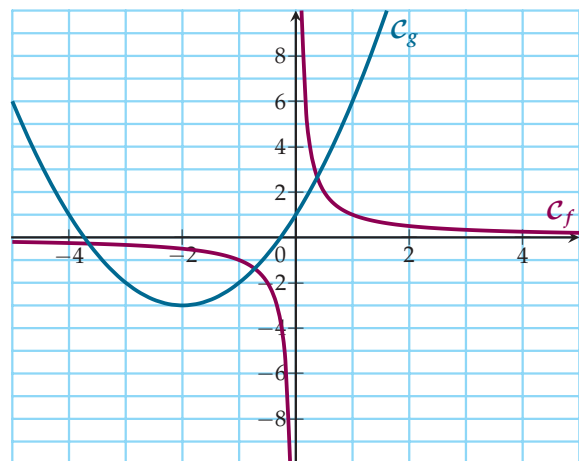
1) Par lecture graphique, déterminer :

- a) l'image de -1 par f ;
- b) $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$;
- c) le(s) antécédent(s) de 1 par f ;
- d) les éventuels nombres qui ont 0 pour image.

2) Citer, si possible, un nombre qui a :

- a) aucun antécédent ; c) 2 antécédents ;
 b) 1 antécédent ; d) 3 antécédents.

129 Voici les courbes représentatives d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^* et d'une fonction g définie sur \mathbb{R} .



1) Par lecture graphique, déterminer :

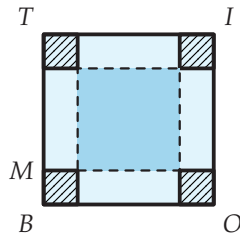
- a) l'image de 1 par la fonction f puis g ;
- b) le (ou les) antécédent(s) de 4 par la fonction g ;
- c) le (ou les) antécédent(s) de -6 par la fonction f .

2) Quel nombre a un seul antécédent par la fonction g ?

3) Quel nombre n'a pas d'antécédent par f ?

130 En boîte !

On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boîte sans couvercle.



PARTIE A : un patron

- 1) Construire une boîte en choisissant $BM = 3$ cm.
- 2) Calculer son volume.
- 3) Peut-on réaliser une boîte sachant que $BM = 8$ cm ? Expliquer.

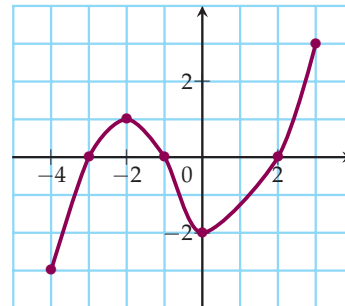
PARTIE B : une fonction

On pose $BM = x$ et on appelle \mathcal{V} la fonction qui à x associe le volume de la boîte sans couvercle.

- 1) Déterminer une expression de la fonction \mathcal{V} .
- 2) Quel est l'ensemble de définition de \mathcal{V} ?
- 3) À l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de la fonction \mathcal{V} .
- 4) Pour quelles valeurs de x le volume est-il supérieur ou égal à 100 ?
- 5) Le volume de cette boîte peut-il dépasser 1 dL ? Si oui, donner les dimensions d'une boîte vérifiant cette condition. Si non, expliquer pourquoi.

131 Avec un paramètre

On considère une fonction f définie sur $[-4; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



- 1) Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
- 2) Combien d'antécédent(s) possède 2 ?
- 3) Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
- 4) Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f .
- 5) Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f , suivant les valeurs de t .

SOLUTIONS

Chapitre F1

Généralités sur les fonctions

S'entraîner

101 5

102 5

103 0

104 1) 4

2) 2 ou 10

105 3

106 1)

a) 0

c) $\approx 1,5$

b) 4

d) 4

2) -1 et 5

107 (3;5)

108 $k(-1) = 2$

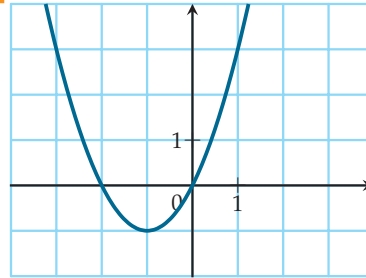
109 non

110 -8

111

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-4	0	-2	0	16

119



124 1) 26

3) 0

2) 6

4) $15 + 7\sqrt{5}$

125

1) -0,5

2) $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

3) -1

126

1) 1,5

2) 3

3) $\approx -1,3$ et $\approx 1,3$

4) 0