

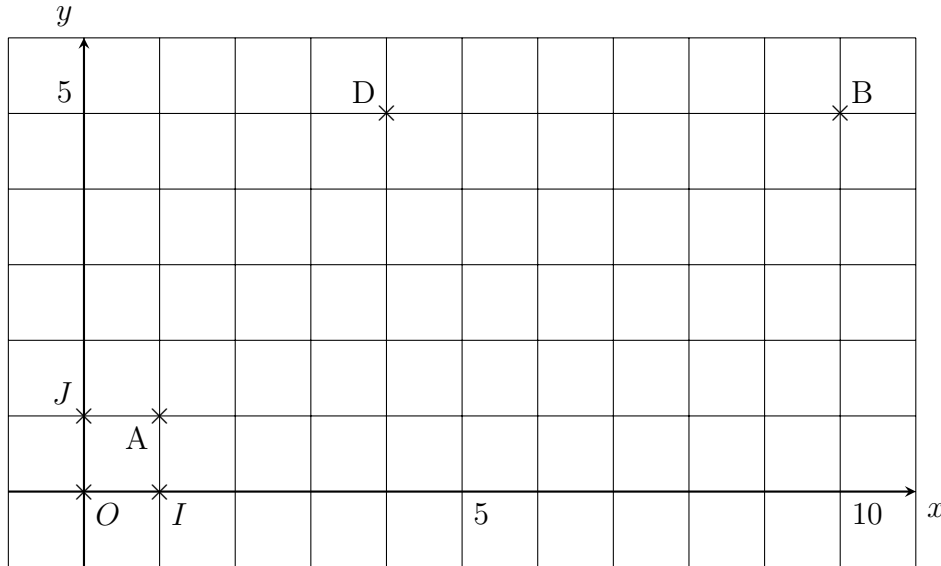
**Exercice 1**

4 points

Un élève a voulu tracer un parallélogramme  $ABCD$  mais il ne sait pas où placer le sommet  $C$ .

Comment pouvez-vous l'aider ?

Vous détaillerez votre démarche sur votre copie avant de réaliser des calculs.



**Exercice 2**

6 points

On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(3 ; 0)$ ,  $B(2 ; -3)$  et  $C(-10 ; 3)$ .

Vos réponses seront argumentées.

1. Le point  $A$  appartient-il au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$  ?
2. Le point  $C$  appartient-il à la médiatrice de  $[AB]$  ?

**Exercice 3**

10 points

Le plan  $(\mathcal{P})$  est muni d'un repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ .

Dans ce repère, on considère les points suivants  $A(19 ; 26)$ ;  $B(-26 ; 41)$  et  $C(4 ; -19)$ . On désigne par  $D$ ,  $E$  et  $F$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$ .

1. Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle.
2. Calculer les coordonnées des points  $D$ ,  $E$  et  $F$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
3. Démontrer que le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.
4. En déduire la nature du triangle  $DEF$ .
5. Déterminer les coordonnées des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  dans le repère  $(A, B, C)$ .
6. Pourquoi peut-on calculer des distances dans le repère  $(A, B, C)$  ?

*F I O*  
*E i O*

**Exercice 1** On veut que  $ABCD$  soit un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu.  $[AC]$  et  $[BD]$  doivent donc avoir le même milieu.

On peut déterminer le milieu  $M$  de  $[BD]$  :  $M(7 ; 5)$ .

Il doit être le milieu de  $[AC]$  également.

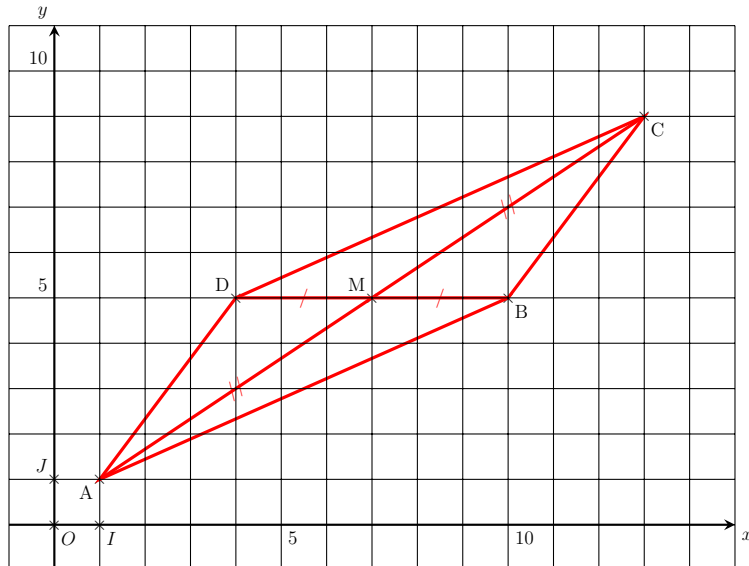
Soit  $M(7 ; 5)$  milieu de  $[AC]$  :

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & \frac{1 + x_C}{2} \\ 14 & = & 1 + x_C \\ 13 & = & x_C \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5 & = & \frac{1 + y_C}{2} \\ 10 & = & 1 + y_C \\ 9 & = & y_C \end{array}$$

Donc le point  $C$  a pour coordonnées  $(13 ; 9)$ .

$$\boxed{C(13 ; 9)}$$

**Remarque :** Il n'était pas demandé de placer le point  $C$  ni de tracer le parallélogramme !



**Exercice 2** On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(3 ; 0)$ ,  $B(2 ; -3)$  et  $C(-10 ; 3)$ . Vos réponses seront argumentées.

- $CB = \sqrt{180}$  et  $CA = \sqrt{178}$ .  
 $CB \neq CA$  donc le point  $A$  n'appartient pas au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$ .
- De même,  $CB \neq CA$  donc le point  $C$  n'appartient pas à la médiatrice de  $[AB]$ .

**Exercice 3**

- Dans le repère  $(O, I, J)$  orthonormé, on calcule :

$$AB = \sqrt{(-26 - 19)^2 + (41 - 26)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-45)^2 + (15)^2}$$

$$AB = \sqrt{2025 + 225}$$

$$AB = \sqrt{2250}$$

De même, on obtient :

$$AC = \sqrt{2250} \text{ et } BC = \sqrt{4500}$$

On a  $AB = AC$  donc le triangle  $ABC$  est **isocèle**.

De plus,  $BC^2 = (\sqrt{4500})^2 = 4500$  et

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{2250})^2 + (\sqrt{2250})^2 = 4500$$

D'où,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est **rectangle** en  $A$ .

Conclusion :  $\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle isocèle en } A.}$

2. Dans le repère  $(O, I, J)$ ,

$$x_D = \frac{19 + (-26)}{2} = \frac{-7}{2} = -3,5 \text{ et}$$

$$y_D = \frac{26 + 41}{2} = \frac{67}{2} = 33,5$$

Donc  $D \left( -\frac{7}{2} ; \frac{67}{2} \right)$

De même, on a :

$E(-11 ; 11)$  et  $F \left( \frac{23}{2} ; \frac{7}{2} \right)$

3. Un carré est un parallélogramme particulier, commençons par montrer que  $ADEF$  est un parallélogramme :

Soit  $M$  milieu de  $[AE]$ ,  $M \left( 4 ; \frac{37}{2} \right)$

Soit  $N$  milieu de  $[DF]$ ,  $N \left( 4 ; \frac{37}{2} \right)$

$M$  et  $N$  sont **confondus**.

Un quadrilatère dont les diagonales ont leurs milieux **confondus** est un parallélogramme.  $M$  et  $N$  sont confondus donc le quadrilatère  $ADEF$  est un parallélogramme.

$$AE = \sqrt{1125} \text{ et } DF = \sqrt{1125}$$

Un parallélogramme dont les **diagonales ont même longueur** est un rectangle.  $AE = DF$  donc le parallélogramme  $ADEF$  est un rectangle.

$$AD = \sqrt{562,5} \text{ et } DE = \sqrt{562,5}$$

Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré.  $AD = DE$  donc le rectangle  $ADEF$  est un carré.

Donc le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.

4. D'après la question précédente, on sait que  $ADEF$  est un carré donc en particulier que  $DE = EF$  et que  $\widehat{DEF} = 90^\circ$ .

Donc le triangle  $DEF$  est **rectangle isocèle**.

5. Dans le repère  $(A, B, C)$ ,  $A(0 ; 0)$  ;  $B(1 ; 0)$  ;  $C(0 ; 1)$  ;  
 $D \left( \frac{1}{2} ; 0 \right)$  ;  $E \left( \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right)$  et  $F \left( 0 ; \frac{1}{2} \right)$ .

6. Le repère  $(A, B, C)$  est **orthonormé** ( $AB = AC$  et  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  OU  $ABC$  rectangle isocèle en  $A$ ) **donc** on peut déterminer la longueur  $AB$  dans ce repère.

**F I N**  
**E I N**

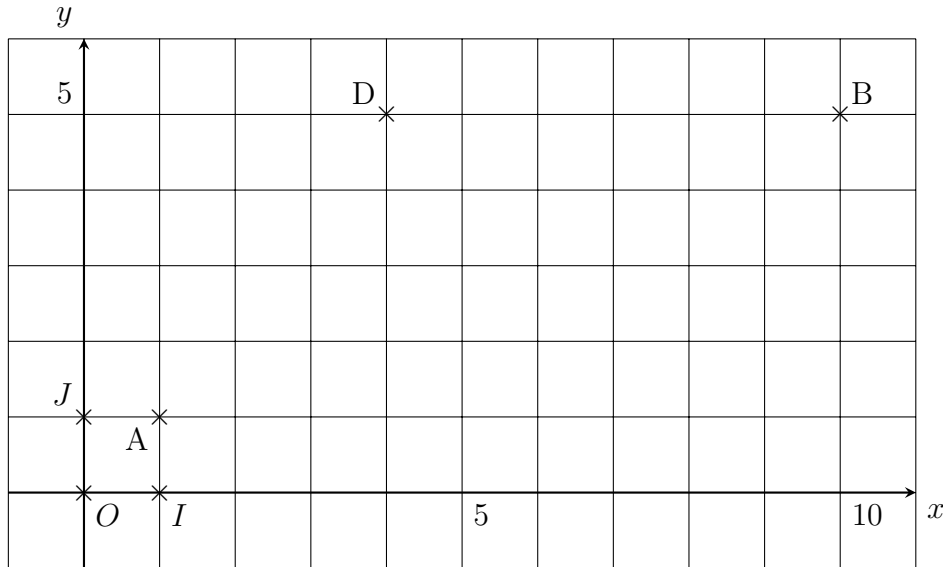
**Exercice 1**

4 points

Un élève a voulu tracer un parallélogramme  $ABCD$  mais il ne sait pas où placer le sommet  $C$ .

Comment pouvez-vous l'aider ?

Vous détaillerez votre démarche sur votre copie avant de réaliser des calculs.



**Exercice 2**

6 points

On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(-3 ; 0)$ ,  $B(-2 ; -3)$  et  $C(10 ; 3)$ .

Vos réponses seront argumentées.

1. Le point  $A$  appartient-il au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$  ?
2. Le point  $C$  appartient-il à la médiatrice de  $[AB]$  ?

**Exercice 3**

10 points

Le plan  $(\mathcal{P})$  est muni d'un repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ .

Dans ce repère, on considère les points suivants  $A(42 ; -42)$ ;  $B(-33 ; -67)$  et  $C(17 ; 33)$ . On désigne par  $D$ ,  $E$  et  $F$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$ .

1. Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle.
2. Calculer les coordonnées des points  $D$ ,  $E$  et  $F$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
3. Démontrer que le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.
4. En déduire la nature du triangle  $DEF$ .
5. Déterminer les coordonnées des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  dans le repère  $(A, B, C)$ .
6. Pourquoi peut-on calculer des distances dans le repère  $(A, B, C)$  ?

*F I O*  
*E I O*

**Exercice 4** On veut que  $ABCD$  soit un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu.  $[AC]$  et  $[BD]$  doivent donc avoir le même milieu.

On peut déterminer le milieu  $M$  de  $[BD]$  :  $M(7 ; 5)$ .

Il doit être le milieu de  $[AC]$  également.

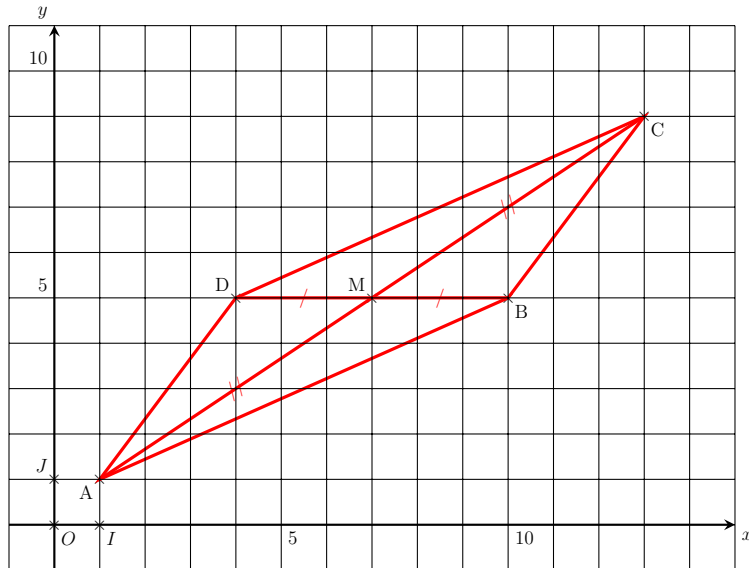
Soit  $M(7 ; 5)$  milieu de  $[AC]$  :

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & \frac{1 + x_C}{2} \\ 14 & = & 1 + x_C \\ 13 & = & x_C \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5 & = & \frac{1 + y_C}{2} \\ 10 & = & 1 + y_C \\ 9 & = & y_C \end{array}$$

Donc le point  $C$  a pour coordonnées  $(13 ; 9)$ .

$$\boxed{C(13 ; 9)}$$

**Remarque :** Il n'était pas demandé de placer le point  $C$  ni de tracer le parallélogramme !



**Exercice 5** On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(-3 ; 0)$ ,  $B(-2 ; -3)$  et  $C(10 ; 3)$ . Vos réponses seront argumentées.

1.  $CB = \sqrt{180}$  et  $CA = \sqrt{178}$ .

$CB \neq CA$  donc le point  $A$  n'appartient pas au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$ .

2. De même,  $CB \neq CA$  donc le point  $C$  n'appartient pas à la médiatrice de  $[AB]$ .

**Exercice 6**

1. Dans le repère  $(O, I, J)$  orthonormé, on calcule :

$$AB = \sqrt{(-33 - 42)^2 + (-67 - (-42))^2}$$

$$AB = \sqrt{(75)^2 + (-25)^2}$$

$$AB = \sqrt{5625 + 625}$$

$$AB = \sqrt{6250}$$

De même, on obtient :

$$AC = \sqrt{6250} \text{ et } BC = \sqrt{12500}$$

On a  $AB = AC$  donc le triangle  $ABC$  est **isocèle**.

De plus,  $BC^2 = (\sqrt{12500})^2 = 12500$  et

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{6250})^2 + (\sqrt{6250})^2 = 12500$$

D'où,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est **rectangle** en  $A$ .

Conclusion :  $\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle isocèle en } A.}$

2. Dans le repère  $(O, I, J)$ ,

$$x_D = \frac{42 + (-33)}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ et}$$
$$y_D = \frac{-42 + (-67)}{2} = \frac{-109}{2} = -54,5$$

Donc  $D \left( \frac{9}{2}; -\frac{109}{2} \right)$

De même, on a :

$E(-8; -17)$  et  $F \left( \frac{59}{2}; -\frac{9}{2} \right)$

3. Un carré est un parallélogramme particulier, commençons par montrer que  $ADEF$  est un parallélogramme :

Soit  $M$  milieu de  $[AE]$ ,  $M \left( 17; -\frac{59}{2} \right)$

Soit  $N$  milieu de  $[DF]$ ,  $N \left( 17; -\frac{59}{2} \right)$

$M$  et  $N$  sont **confondus**.

Un quadrilatère dont les diagonales ont leurs milieux **confondus** est un parallélogramme.  $M$  et  $N$  sont confondus donc le quadrilatère  $ADEF$  est un parallélogramme.

$$AE = \sqrt{3125} \text{ et } DF = \sqrt{3125}$$

Un parallélogramme dont les **diagonales ont même longueur** est un rectangle.  $AE = DF$  donc le parallélogramme  $ADEF$  est un rectangle.

$$AD = \sqrt{1562,5} \text{ et } DE = \sqrt{1562,5}$$

Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré.  $AD = DE$  donc le rectangle  $ADEF$  est un carré.

Donc le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.

4. D'après la question précédente, on sait que  $ADEF$  est un carré donc en particulier que  $DE = EF$  et que  $\widehat{DEF} = 90^\circ$ .

Donc le triangle  $DEF$  est **rectangle isocèle**.

5. Dans le repère  $(A, B, C)$ ,  $A(0; 0)$ ;  $B(1; 0)$ ;  $C(0; 1)$ ;  $D \left( \frac{1}{2}; 0 \right)$ ;  $E \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$  et  $F \left( 0; \frac{1}{2} \right)$ .

6. Le repère  $(A, B, C)$  est **orthonormé** ( $AB = AC$  et  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  OU  $ABC$  rectangle isocèle en  $A$ ) **donc** on peut déterminer la longueur  $AB$  dans ce repère.

**F I N**  
**E i n**