

**Données pour les exercices 1 et 2 :**

Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est muni d'un repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ .

Dans ce repère, on considère les points suivants  $A(-122; -48)$ ;  $B(28; -98)$  et  $C(-72; 102)$ . On désigne par  $D, E$  et  $F$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$ .

**Exercice 1**

- Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .
- Déterminer les coordonnées des points  $D, E$  et  $F$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
- Montrer que le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.
- En déduire la nature du triangle  $DEF$ .

**Exercice 2**

- Déterminer les coordonnées des points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  dans le repère  $(A, B, C)$ .
- Peut-on déterminer la longueur  $AB$  dans ce repère ?  
Si oui, comment ? Sinon, pourquoi ?
- Déterminer les coordonnées des points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  dans le repère  $(A, C, B)$ .

**Exercice 3** On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(3; 0)$ ,  $B(2; -3)$  et  $C(-10; 3)$ .

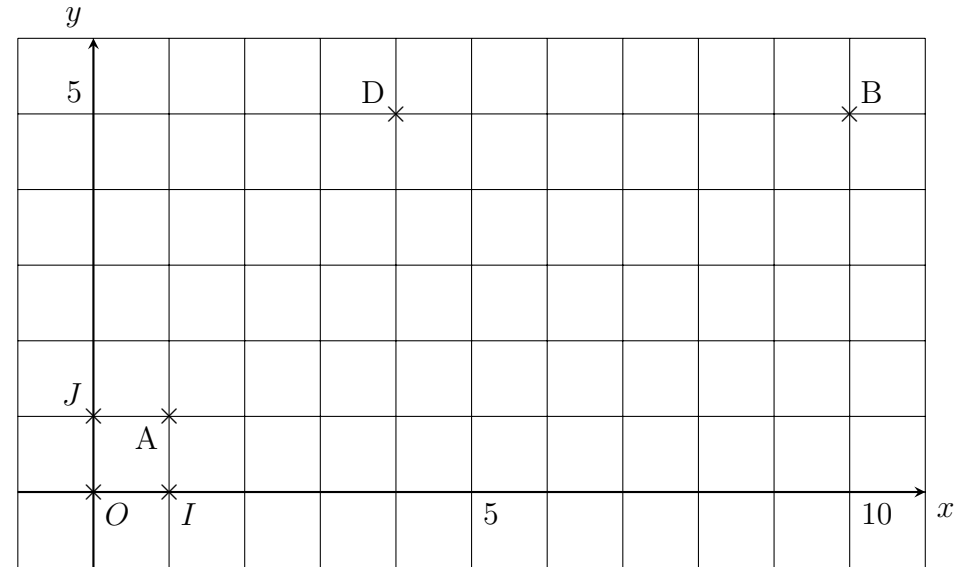
Vos réponses seront argumentées.

- Le point  $A$  appartient-il au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$  ?
- Le point  $C$  appartient-il à la médiatrice de  $[AB]$  ?

**Exercice 4** Un élève a voulu tracer un parallélogramme  $ABCD$  mais il ne sait pas où placer le sommet  $C$ .

Comment pouvez-vous l'aider ?

Vous détaillerez votre démarche sur votre copie avant de réaliser des calculs.



*F I N*  
*E t O*

**Exercice 1**

1. Dans le repère  $(O, I, J)$  orthonormé, on calcule :

$$AB = \sqrt{(28 - (-122))^2 + (-98 - (-48))^2}$$

$$AB = \sqrt{(28 + 122)^2 + (-98 + 48)^2}$$

$$AB = \sqrt{(150)^2 + (-50)^2}$$

$$AB = \sqrt{22500 + 2500}$$

$$AB = \sqrt{25000}$$

De même, on obtient :

$$AC = \sqrt{25000} \text{ et } BC = \sqrt{50000}$$

On a  $AB = AC$  donc le triangle  $ABC$  est **isocèle**.

De plus,  $BC^2 = (\sqrt{50000})^2 = 50000$  et

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{25000})^2 + (\sqrt{25000})^2 = 50000$$

D'où,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est **rectangle** en  $A$ .

Conclusion : Le triangle  $ABC$  est **rectangle isocèle en A**.

2. Dans le repère  $(O, I, J)$ ,

$$x_D = \frac{-122 + 28}{2} = \frac{-94}{2} = -47 \text{ et}$$

$$y_D = \frac{-98 + (-48)}{2} = \frac{-146}{2} = -73$$

Donc  $D(-47 ; -73)$

De même, on a :

$E(-22 ; 2)$  et  $F(-97 ; 27)$

3. Un carré est un parallélogramme particulier, commençons par montrer que  $ADEF$  est un parallélogramme :

Soit  $M$  milieu de  $[AE]$ ,  $M(-72 ; -23)$

Soit  $N$  milieu de  $[DF]$ ,  $N(-72 ; -23)$

$M$  et  $N$  sont **confondus**.

Un quadrilatère dont les diagonales ont leurs milieux **confondus** est un parallélogramme.  $M$  et  $N$  sont confondus donc le quadrilatère  $ADEF$  est un parallélogramme.

$$AE = \sqrt{12500} \text{ et } DF = \sqrt{12500}$$

Un parallélogramme dont les **diagonales ont même longueur** est un rectangle.  $AE = DF$  donc le parallélogramme  $ADEF$  est un rectangle.

$$AD = \sqrt{6250} \text{ et } DE = \sqrt{6250}$$

Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré.  $AD = DE$  donc le rectangle  $ADEF$  est un carré.

Donc le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.

4. D'après la question précédente, on sait que  $ADEF$  est un carré donc en particulier que  $DE = EF$  et que  $\widehat{DEF} = 90^\circ$ .

Donc le triangle  $DEF$  est **rectangle isocèle**.

**Exercice 2**

1. Dans le repère  $(A, B, C)$ ,  $A(0 ; 0)$  ;  $B(1 ; 0)$  ;  $C(0 ; 1)$  ;  
 $D\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$  ;  $E\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$  et  $F\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ .

2. Le repère  $(A, B, C)$  est **orthonormé** ( $AB = AC$  et  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  OU  $ABC$  rectangle isocèle en  $A$ ) **donc** on peut déterminer la longueur  $AB$  dans ce repère.

3. Dans le repère  $(A, C, B)$ ,  $A(0 ; 0)$  ;  $B(0 ; 1)$  ;  $C(1 ; 0)$  ;  
 $D\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$  ;  $E\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$  et  $F\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ .

**Exercice 3** On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(3 ; 0)$ ,  $B(2 ; -3)$  et  $C(-10 ; 3)$ .

Vos réponses seront argumentées.

1.  $CB = \sqrt{180}$  et  $CA = \sqrt{178}$ .

$CB \neq CA$  donc le point  $A$  n'appartient pas au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$ .

2. De même,  $CB \neq CA$  donc le point  $C$  n'appartient pas à la médiatrice de  $[AB]$ .

**Exercice 4** On veut que  $ABCD$  soit un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu.  $[AC]$  et  $[BD]$  doivent donc avoir le même milieu.

On peut déterminer le milieu  $M$  de  $[BD]$  :  $M(7 ; 5)$ .

Il doit être le milieu de  $[AC]$  également.

Soit  $M(7 ; 5)$  milieu de  $[AC]$  :

$$7 = \frac{1 + x_C}{2}$$

$$14 = 1 + x_C$$

$$13 = x_C$$

$$5 = \frac{1 + y_C}{2}$$

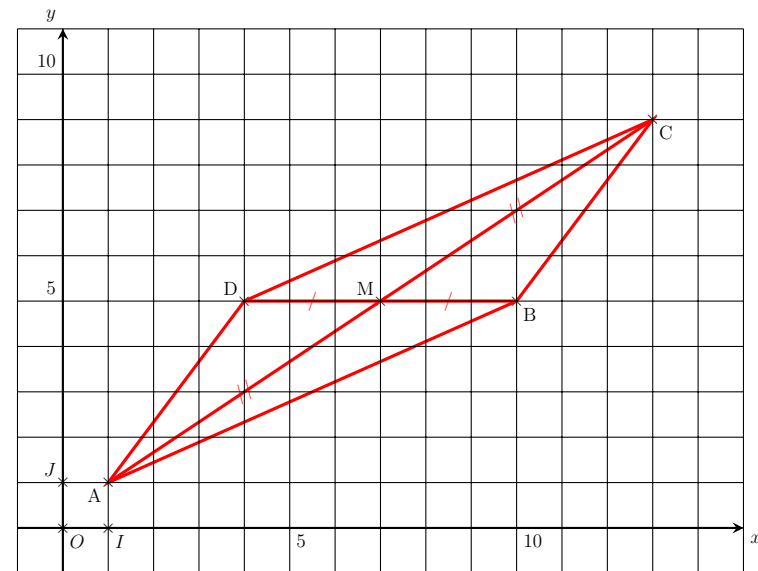
$$10 = 1 + y_C$$

$$9 = y_C$$

Donc le point  $C$  a pour coordonnées  $(13 ; 9)$ .

$$C(13 ; 9)$$

**Remarque :** Il n'était pas demandé de placer le point  $C$  ni de tracer le parallélogramme !



**F ! D**  
**E i D**

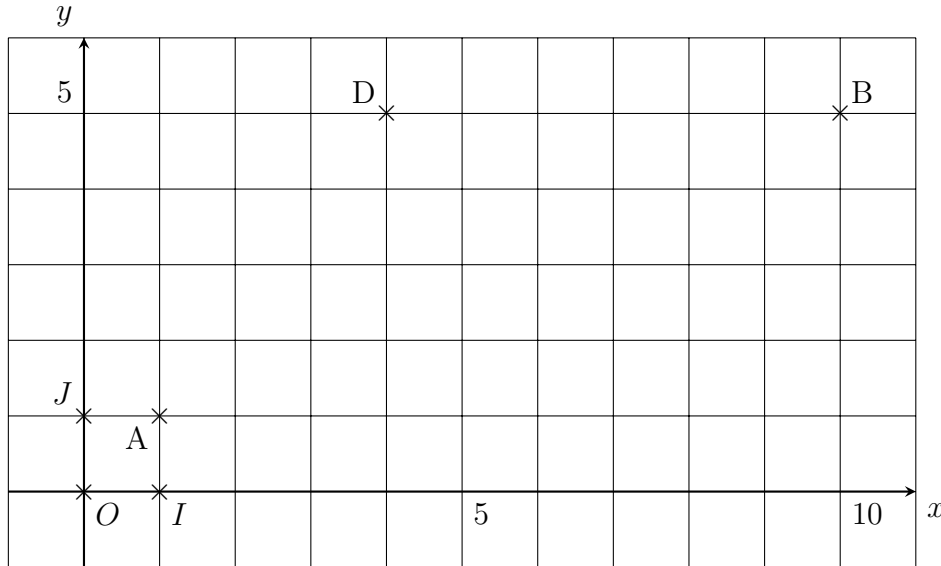
**Exercice 1**

4 points

Un élève a voulu tracer un parallélogramme  $ABCD$  mais il ne sait pas où placer le sommet  $C$ .

Comment pouvez-vous l'aider ?

Vous détaillerez votre démarche sur votre copie avant de réaliser des calculs.



**Exercice 2**

6 points

On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(-3 ; 0)$ ,  $B(-2 ; -3)$  et  $C(10 ; 3)$ .

Vos réponses seront argumentées.

1. Le point  $A$  appartient-il au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$  ?
2. Le point  $C$  appartient-il à la médiatrice de  $[AB]$  ?

**Exercice 3**

10 points

Le plan  $(\mathcal{P})$  est muni d'un repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ .

Dans ce repère, on considère les points suivants  $A(122 ; -48)$ ;  $B(-28 ; -98)$  et  $C(72 ; 102)$ . On désigne par  $D$ ,  $E$  et  $F$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$ .

1. Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle.
2. Calculer les coordonnées des points  $D$ ,  $E$  et  $F$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
3. Démontrer que le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.
4. En déduire la nature du triangle  $DEF$ .
5. Déterminer les coordonnées des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  dans le repère  $(A, B, C)$ .
6. Pourquoi peut-on calculer des distances dans le repère  $(A, B, C)$  ?

*F I O*  
*E i O*

**Exercice 1** On veut que  $ABCD$  soit un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu.  $[AC]$  et  $[BD]$  doivent donc avoir le même milieu.

On peut déterminer le milieu  $M$  de  $[BD]$  :  $M(7 ; 5)$ .

Il doit être le milieu de  $[AC]$  également.

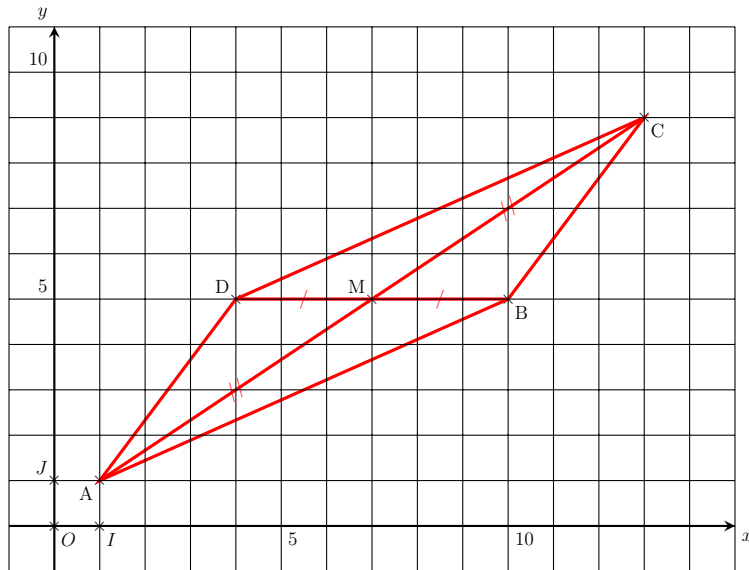
Soit  $M(7 ; 5)$  milieu de  $[AC]$  :

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{1 + x_C}{2} & 5 &= \frac{1 + y_C}{2} \\ 14 &= 1 + x_C & 10 &= 1 + y_C \\ 13 &= x_C & 9 &= y_C \end{aligned}$$

Donc le point  $C$  a pour coordonnées  $(13 ; 9)$ .

$$\boxed{C(13 ; 9)}$$

**Remarque :** Il n'était pas demandé de placer le point  $C$  ni de tracer le parallélogramme !



**Exercice 2** On se place dans le repère *orthonormé*  $(O, I, J)$ . Dans ce repère, on considère les points  $A(-3 ; 0)$ ,  $B(-2 ; -3)$  et  $C(10 ; 3)$ . Vos réponses seront argumentées.

1.  $CB = \sqrt{180}$  et  $CA = \sqrt{178}$ .

$CB \neq CA$  donc le point  $A$  n'appartient pas au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $C$  passant par  $B$ .

2. De même,  $CB \neq CA$  donc le point  $C$  n'appartient pas à la médiatrice de  $[AB]$ .

**Exercice 3**

1. Dans le repère  $(O, I, J)$  orthonormé, on calcule :

$$AB = \sqrt{(-28 - 122)^2 + (-98 - (-48))^2}$$

$$AB = \sqrt{(-28 - 122)^2 + (-98 + 48)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-150)^2 + (-50)^2}$$

$$AB = \sqrt{22500 + 2500}$$

$$AB = \sqrt{25000}$$

De même, on obtient :

$$AC = \sqrt{25000} \text{ et } BC = \sqrt{50000}$$

On a  $AB = AC$  donc le triangle  $ABC$  est **isocèle**.

De plus,  $BC^2 = (\sqrt{50000})^2 = 50000$  et

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{25000})^2 + (\sqrt{25000})^2 = 50000$$

D'où,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est **rectangle** en  $A$ .

Conclusion :  $\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle isocèle en } A.}$

2. Dans le repère  $(O, I, J)$ ,

$$x_D = \frac{122 + (-28)}{2} = \frac{94}{2} = 47 \text{ et}$$

$$y_D = \frac{-98 + (-48)}{2} = \frac{-146}{2} = -73$$

Donc  $D(47; -73)$

De même, on a :

$E(22; 2)$  et  $F(97; 27)$

3. Un carré est un parallélogramme particulier, commençons par montrer que  $ADEF$  est un parallélogramme :

Soit  $M$  milieu de  $[AE]$ ,  $M(72; -23)$

Soit  $N$  milieu de  $[DF]$ ,  $N(72; -23)$

$M$  et  $N$  sont **confondus**.

Un quadrilatère dont les diagonales ont leurs milieux **confondus** est un parallélogramme.  $M$  et  $N$  sont confondus donc le quadrilatère  $ADEF$  est un parallélogramme.

$$AE = \sqrt{12500} \text{ et } DF = \sqrt{12500}$$

Un parallélogramme dont les **diagonales ont même longueur** est un rectangle.  $AE = DF$  donc le parallélogramme  $ADEF$  est un rectangle.

$$AD = \sqrt{6250} \text{ et } DE = \sqrt{6250}$$

Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré.  $AD = DE$  donc le rectangle  $ADEF$  est un carré.

Donc le quadrilatère  $ADEF$  est un carré.

4. D'après la question précédente, on sait que  $ADEF$  est un carré donc en particulier que  $DE = EF$  et que  $\widehat{DEF} = 90^\circ$ .

Donc le triangle  $DEF$  est **rectangle isocèle**.

5. Dans le repère  $(A, B, C)$ ,  $A(0; 0)$ ;  $B(1; 0)$ ;  $C(0; 1)$ ;  
 $D\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ ;  $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et  $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

6. Le repère  $(A, B, C)$  est **orthonormé** ( $AB = AC$  et  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  OU  $ABC$  rectangle isocèle en  $A$ ) **donc** on peut déterminer la longueur  $AB$  dans ce repère.

**F I N**  
**E I N**