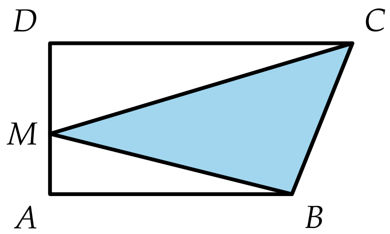
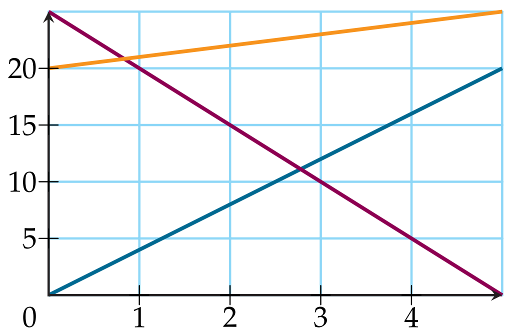
Il est autorisé de rendre un devoir rédigé seul ou à deux.
Un soin particulier sera accordé à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 On considère un trapèze rectangle $ABCD$, comme sur la figure ci-dessous. On place un point libre M sur le segment $[AD]$.



La distance AM en cm est notée x.
On a représenté les courbes représentatives des trois fonctions donnant, en fonction de x, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.

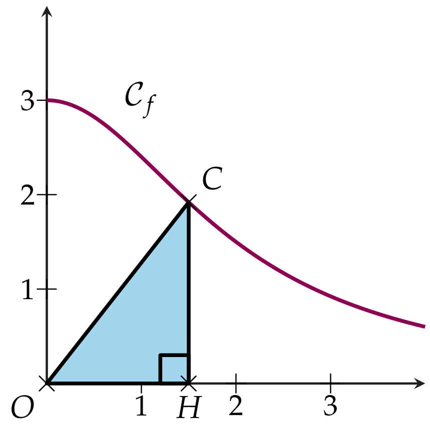


1) À quelle aire correspond chacune des courbes ? Justifier.
2) Retrouver les expressions des fonctions représentées.
3) En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.

Exercice 2 Un artisan fait une étude sur la vente de sa production de vases. Il en fabrique entre 0 et 60 par mois et estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu à 50 €.
1) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2) Calculer le coût et la recette réalisés lorsque l'artisan vend 50 vases.
3) Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
4) Déterminer le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum. Justifier.
5) Identifier les situations dans lesquelles l'artisan perd de l'argent. Justifier.

Exercice 3 On a représenté ci-dessous la courbe représentant la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(x) = \dfrac{12}{x^2+4}$.

C est un point de la courbe [1] et H est son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. O est l'origine du repère.



1) Existe-t-il une position du point C telle que l'aire du triangle CHO soit maximale ? Justifiez.
2) Si oui, quelle est cette position et quelle est la valeur de cette aire maximale ? Justifiez.

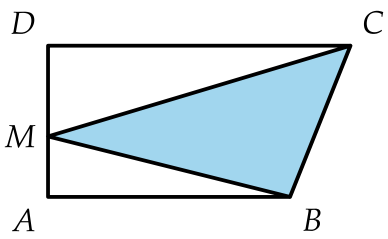
Recherches : ***synthétiser en quelques lignes vos recherches sur…***
1) … la « découverte » du nombre $\sqrt{2}$ en lien avec l'Antiquité.
2) … le nombre d'or, en lien avec l'Antiquité.

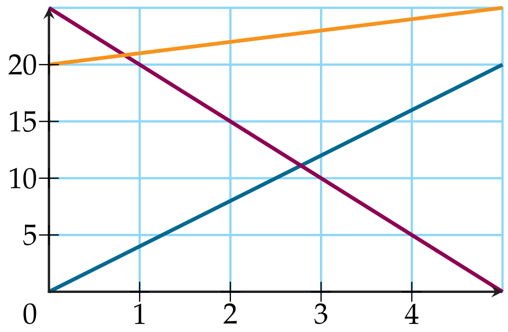
Bonnes vacances

1. **Coup de pouce :** Si x est l'abscisse de C, quelle est son ordonnée ?

Exercice 1

La distance AM en cm est notée x. On a représenté les courbes représentatives des trois fonctions donnant, en fonction de x, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.





1) À quelle aire correspond chacune des courbes ? Justifier.
On sait que $0 \leqslant AM \leqslant AD$ (énoncé).
   a) Lorsque x diminue, la longueur AM diminue jusqu'à 0. Ainsi, l'aire du triangle ABM diminue jusqu'à être nulle lorsque $x = 0$. Parmi les 3 droites proposées, c'est la bleue qui correspond à l'aire du triangle ABM.
   b) Lorsque x augmente, la longueur AM augmente jusqu'à atteindre la longueur AD. Ainsi, la longueur DM diminue et l'aire du triangle DCM diminue également jusqu'à devenir nulle lorsque les points M et D sont confondus (lorsque $x = AM = AD$). Parmi les 3 droites proposées, c'est la violette qui correspond à l'aire du triangle ABM.
   c) Par déduction, c'est la droite jaune qui correspond à l'aire du triangle BCM. On remarquera notamment que cette droite est la seule qui ne coupe pas l'axe des abscisses, on peut le prévoir en regardant la figure : l'aire BCM est la seule qui ne s'annule pas lorsque M parcourt le segment $[AD]$.

2) Retrouver les expressions des fonctions représentées.
   a) *Aire ABM* $f_1 : x \mapsto 4x$
   b) *Aire DCM* $f_2 : x \mapsto -5x + 25$
   c) *Aire BCM* $f_3 : x \mapsto x + 20$

3) En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.
$AD = 5$, $AB = 8$, $DC = 10$ et $BC = \sqrt{29}$.

Exercice 2 Un artisan fait une étude sur la vente de sa production de vases. Il en fabrique entre 0 et 60 par mois et estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu à 50 €.

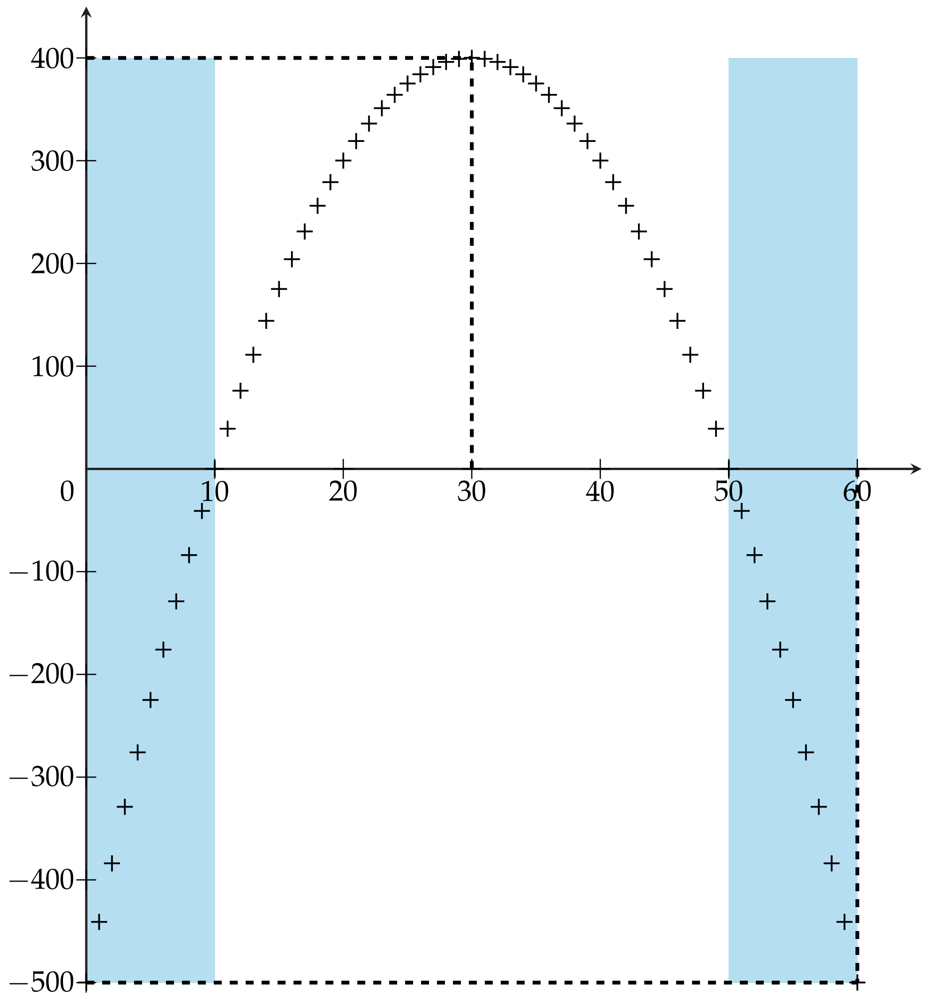
1) $R(x) = 50x$.
2) $C(x) = 50^2 - 10 \times 50 + 500 = 2500 - 500 + 500 = 2500$
3)
$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 50x - (x^2 - 10x + 500) \\ &= -x^2 + 60x - 500 \end{aligned}$$

donc $B(x) = -x^2 + 60x - 500$

4) Graphiquement, avec un logiciel ou une calculatrice graphique, on peut voir que la fonction bénéfice B atteint son maximum en $x = 30$ et $B(30) = 400$. Le bénéfice maximum est réalisé pour l'artisan lorsqu'il produit et vend 30 vases. Ce bénéfice est de 400 €.

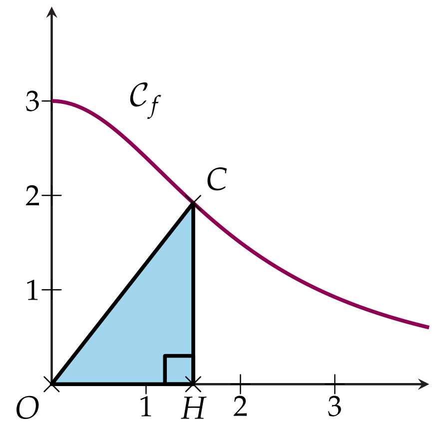
La fonction (*représentée à la page suivante*) est définie pour x entier naturel ! L'artisan ne produit ni ne vend des demi-vases ! Les points $(x; B(x))$ ne sont donc pas reliés !

5) L'artisan perd de l'argent lorsqu'il ne fait pas de bénéfice, autrement dit lorsque $B(x) < 0$. On voit ci-dessus (en bleu) que la fonction B est négative pour $0 \leqslant x < 10$ et $50 \leqslant x < 60$. Autrement dit, l'artisan perd de l'agent s'il produit et vend entre 0 et 9 vases ou entre 51 et 60 vases.



Exercice 3 On a représenté ci-dessous la courbe représentant la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(x) = \dfrac{12}{x^2+4}$.

C est un point de la courbe et H est son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. O est l'origine du repère.



1) Existe-t-il une position du point C telle que l'aire du triangle CHO soit maximale ? Justifiez.
2) Si oui, quelle est cette position et quelle est la valeur de cette aire maximale ? Justifiez.

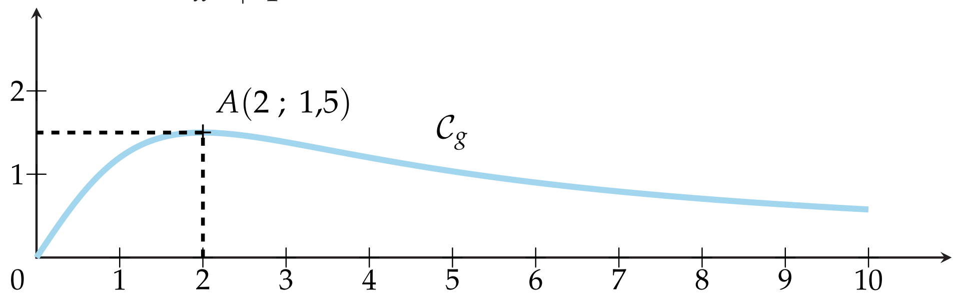
$C \in \mathcal{C}_f$ donc les coordonnées du point C sont $(x; f(x))$ soit $\left(x; \dfrac{12}{x^2+4}\right)$.

L'aire du triangle rectangle CHO est égale à $\dfrac{OH \times CH}{2}$ soit $\dfrac{x \times \dfrac{12}{x^2+4}}{2}$.

En simplifiant l'expression, on obtient $x \times \dfrac{12}{x^2+4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{6x}{x^2+4}$.

On appelle g la fonction qui à x associe l'aire du triangle CHO.

On a $g : x \mapsto \dfrac{6x}{x^2+4}$. Traçons la courbe représentative de la fonction g :



On peut identifier le maximum de la fonction g à l'aide de la fonction MAX de la calculatrice ou d'un logiciel. Ce point A a pour coordonnées $(2 ; 1{,}5)$, ce qui signifie que pour $x = 2$ l'aire du triangle CHO est de 1,5 (unités d'aire).