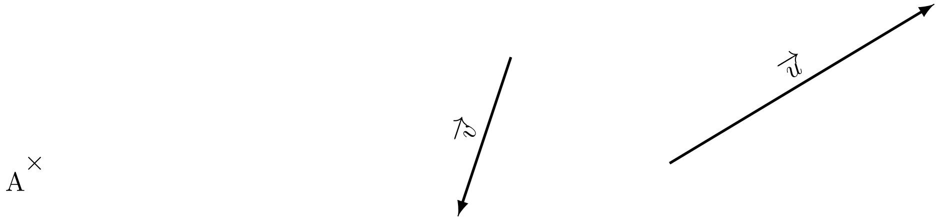
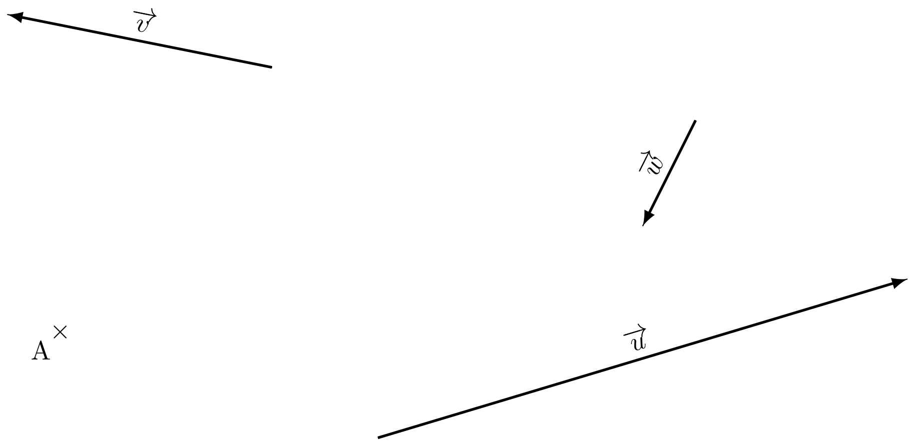
Mathématiques
DM1 Vacances de la Toussaint

Exercice 1 Placez le point B, image du point A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Exercice 2

1. Construisez le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Construisez le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
3. Construisez le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.



Exercice 3 Relation de Chasles

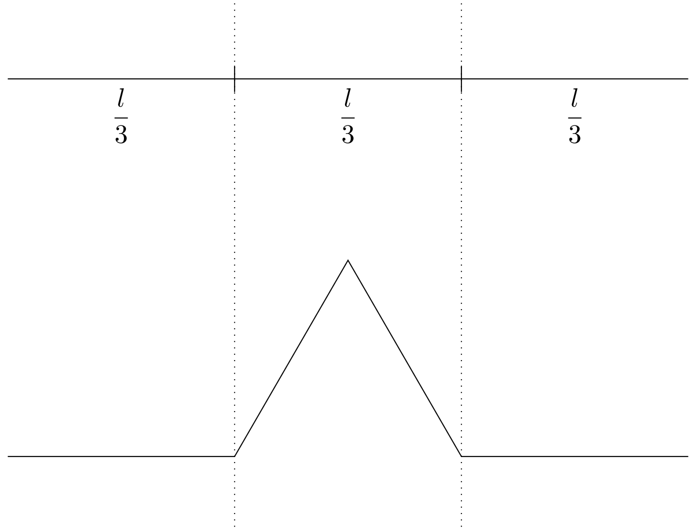
1. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} =$
2. $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CD} =$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} =$
4. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} =$

Exercice 4 Vrai ou faux ?

1. Dire que $VECT$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{VC} = \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{CT}$
2. Dire que $VECT$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{ET} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EV}$
3. Dire que $ROND$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND}$

Exercice 5 Soit un segment de longueur l, on réalise les transformations suivantes :

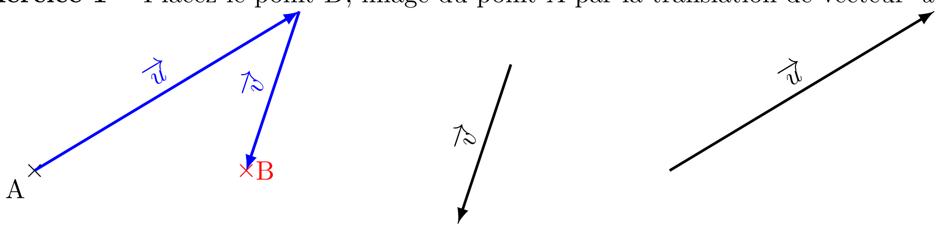
* On sépare le segment en 3 segments de longueurs égales,
* On remplace le segment central de longueur $\dfrac{l}{3}$ par un triangle équilatéral de côté $\dfrac{l}{3}$,
* On supprime la base du triangle ainsi construit (voir ci-dessous).



1. Quelle est la longueur de la ligne ainsi obtenue ?
2. On recommence une fois le processus sur chaque segment de cette ligne.
   Quelle est la longueur de la ligne obtenue ?
3. Peut-on prévoir l'évolution de la longueur si on continue le processus une troisième fois ? une quatrième fois ? . . . une centième fois ?

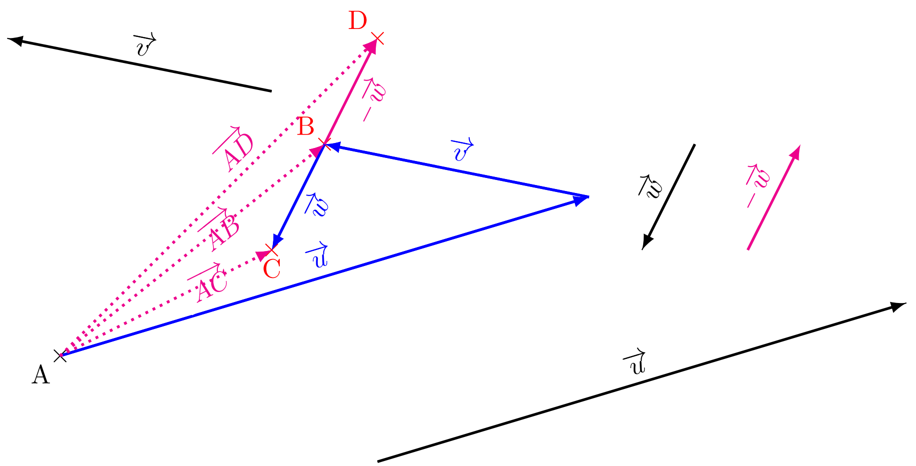
Bonnes vacances

Exercice 1 Placez le point B, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

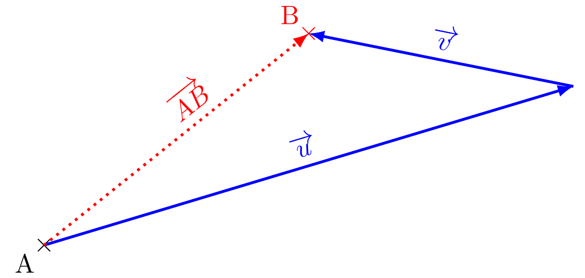


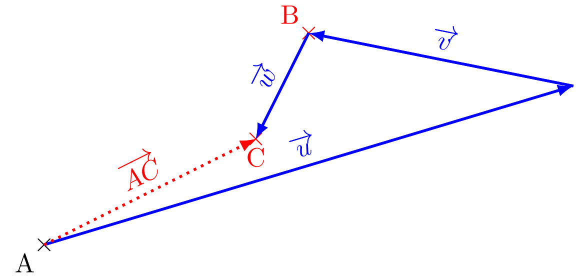
Exercice 2

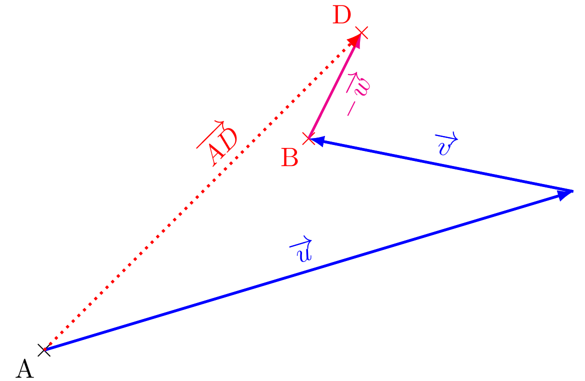
1. Construisez le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.
2. Construisez le point C tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$.
3. Construisez le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$.



Détail des constructions de chacun des trois points :







Exercice 3 Relation de Chasles

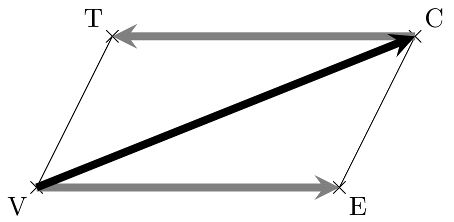
Les vecteurs obtenus par utilisation de la relation de Chasles sont écrits en bleu.
Les vecteurs obtenus par réécriture dans un ordre judicieux sont écrits en magenta.
Les vecteurs obtenus par écriture de l'opposé sont écrits en vert.

1. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$
4. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$

Exercice 4 Vrai ou faux ?

1. Dire que $VECT$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{VC} = \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{CT}$

   $VECT$ est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{VE} = \overrightarrow{TC}$ (voir cours)

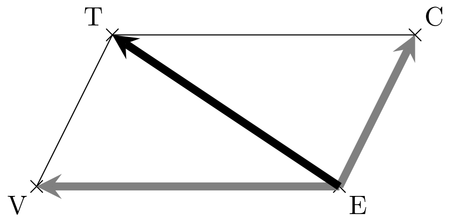


$$\overrightarrow{VE} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{TT} = \overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{VC}$$

L'affirmation est fausse !

2. Dire que $VECT$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{ET} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EV}$

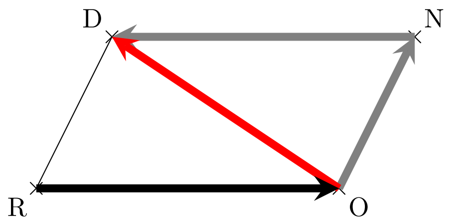
   $VECT$ est un parallélogramme mais on peut également le nommer $ECTV$ sans rien changer au quadrilatère à part la façon de le nommer.
   On a donc,
   $VECT$ est un parallélogramme
   équivaut à $ECTV$ est un parallélogramme
   équivaut à $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{VT}$ (voir cours)



$$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EV} = \overrightarrow{VT} + \overrightarrow{EV} = \overrightarrow{EV} + \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{ET}$$

L'affirmation est vraie !

3. Dire que $ROND$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND}$



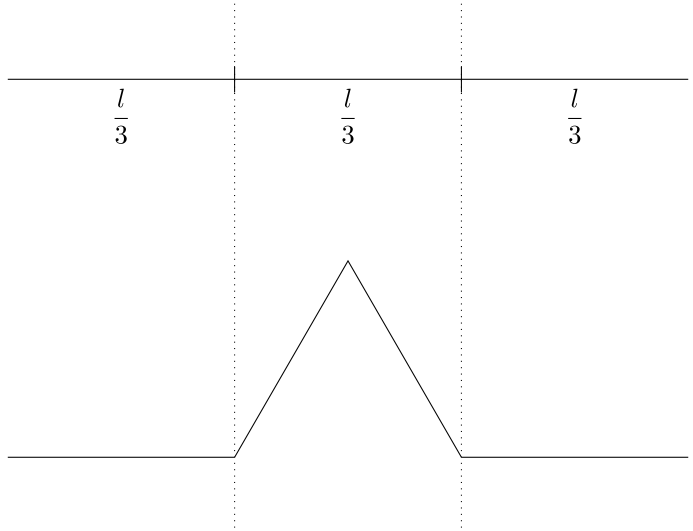
D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{OD} \neq \overrightarrow{RO}$$

L'affirmation est fausse !

Exercice 5 Soit un segment de longueur l, on réalise les transformations suivantes :

* On sépare le segment en 3 segments de longueurs égales,
* On remplace le segment central de longueur $\frac{l}{3}$ par un triangle équilatéral de côté $\frac{l}{3}$,
* On supprime la base du triangle ainsi construit (voir ci-dessous).



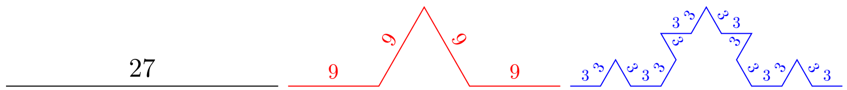
1. Quelle est la longueur de la ligne ainsi obtenue ?

   Au début, on a un segment de longueur l. à l'étape suivante, la ligne est formée de 4 segments de longueur $\frac{l}{3}$. La longueur de la ligne ainsi obtenue est donc de $4 \times \frac{l}{3}$.
   Exemple avec $l = 27$: longueur de la ligne $= 4 \times \frac{27}{3} = 4 \times 9 = 36$.

2. On recommence une fois le processus sur chaque segment de cette ligne.
   Quelle est la longueur de la ligne obtenue ?

   On remarque qu'à l'étape précédente, on avait 4 segments de longueur $\frac{l}{3}$. La longueur totale était de $4 \times \frac{l}{3}$ soit « nombre de segments » × « leur longueur respective ». On recommence une fois le processus sur chaque segment de cette ligne. Les 4 segments de l'étape précédente donnent donc chacun naissance à 4 nouveaux segments qui sont eux-mêmes 3 fois plus petits que les segments de l'étape précédente.

   Ex : $l = 27$



Il y a donc $4 \times 4 = 16$ segments, chacun de longueur $\frac{l}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{l}{9}$. La longueur totale est $16 \times \frac{l}{9}$.
Exemple avec $l = 27$: longueur de la ligne $= 16 \times \frac{27}{9} = 16 \times 3 = 48$.

On a vu avec $l = 27$
Longueur du segment initial : 27
Longueur à l'étape 1 : $(4) \times \left(\frac{27}{3}\right) = 4 \times 9 = 36$
Longueur à l'étape 2 : $(4 \times 4) \times \left(\frac{27}{3} \times \frac{1}{3}\right) = (4 \times 4) \times \left(9 \times \frac{1}{3}\right) = 16 \times 3 = 48$

---

3. Peut-on prévoir l'évolution de la longueur si on continue le processus une troisième fois ? une quatrième fois ? ... une centième fois ?
   La longueur est le produit suivant : « nombre de segments » × « leur longueur respective ». On remarque qu'à l'étape précédente on a : $16 \times \frac{l}{9}$ c'est-à-dire 16 segments de longueur $\frac{l}{9}$ soit $16 \times \frac{l}{9}$ que l'on peut écrire

$$\underbrace{(4 \times 4)}_{\text{Nombre de segments à cette étape}} \times \underbrace{\left(\frac{l}{3} \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{Longueur d'un segment à cette étape}}.$$

   Longueur du segment initial : l
   Longueur à l'étape 1 : $(4) \times \left(\frac{l}{3}\right)$
   Longueur à l'étape 2 : $(4 \times 4) \times \left(\frac{l}{3} \times \frac{1}{3}\right)$
   Longueur à l'étape 3 : $(4 \times 4 \times \ldots) \times \left(\frac{l}{3} \times \frac{1}{3} \times \ldots\right)$
   Longueur à l'étape ... : $(4 \times 4 \times \ldots\ldots\ldots) \times \left(\frac{l}{3} \times \frac{1}{3} \times \ldots\ldots\ldots\right)$
   $\vdots$

   Et maintenant, pouvez-vous exprimer la longueur aux étapes suivantes ?
   Pouvez-vous la calculer ?